Независимый Московский Университет
Математический колледж

В.В.Прасолов

Геометрия Лобачевского

Первый курс, первый семестр

Москва
1994

1. Сферическая геометрия

Слово "геометрия" в переводе с греческого означает "землемерие" или "измерение земли". При таком толковании этого слова естественно считать, что геометрия занимается изучением свойств прямых на поверхности некоторой планеты. При этом кривая на поверхности планеты называется *отрезком прямой*, если любая другая кривая с теми же началом и концом имеет бо̀льшую длину. Кривая называется *прямой*, или *геодезической*, если любая ее достаточно короткая дуга является отрезком прямой.

Замечание 1. Слова *прямая* и *геодезическая* — существительные, а не прилагательные.

Замечание 2. Условие "достаточно короткая" существенно для сферы. В остальных случаях, которые будут нам интересны (евклидова плоскость и плоскость Лобачевского), это условие можно отбросить.

В наиболее известной модели геометрии рассматривается неограниченная планета, представляющая собой полупространство. В качестве другой модели геометрии можно взять планету, представляющую собой шар. Такую геометрию называют *сферической*. Выясним, как устроены прямые в сферической геометрии. Назовем *большим кругом* сечение шара плоскостью, проходящей через его центр. Границу большого круга назовем *большой окружностью*. Через любые две точки сферы можно провести большую окружность. Если точки не диаметрально противоположные, то через них проходит единственная большая окружность.

Теорема 1.1. *Пусть A и B — не диаметрально противоположные точки сферы. Тогда на поверхности сферы кратчайшей кривой, соединяющей точки A и B, будет более короткая дуга большой окружности, проходящей через точки A и B.*

Доказательство. Назовем *сферической ломаной* кривую, составленную из дуг больших окружностей. Кривую на сфере можно с любой точностью приблизить конечнозвенной сферической ломаной, поэтому достаточно доказать, что дуга AB короче любой другой сферической ломаной, соединяющей точки A и B. Как и в случае евклидовой плоскости, достаточно рассмотреть двузвенные ломаные. В самом деле, если пару звеньев PQ и QR заменить более коротким PR, то после нескольких таких операций ломаная заменится на одно звено, причем это звено будет короче исходной ломаной.

Длина дуги AB равна φR, где R — радиус сферы, φ — угол, под которым отрезок AB виден из центра сферы. Таким образом, доказательство теоремы сводится к известному неравенству для трехгранных углов: сумма двух плоских углов трехгранного угла больше его третьего плоского угла. $\square$

Таким образом, сферическими прямыми являются большие окружности.

Расстоянием между двумя точками сферы называют длину более короткого отрезка сферической прямой, проходящей через эти точки. (В случае, когда точки диаметрально противоположны, можно взять любой из отрезков любой из сферических прямых, проходящих через эти точки.)

Движением или *изометрией* сферы называют ее взаимно однозначное преобразование, не изменяющее расстояний между точками. Примерами движений сферы служат вращение сферы вокруг оси, проходящей через ее центр, и симметрия относительно плоскости, проходящей через центр.

Теорема 1.2. *а) Любое движение сферы можно представить в виде композиции не более чем трех симметрий относительно плоскостей, проходящих через ее центр.*

б) Любое движение сферы, сохраняющее ориентацию, является вращением вокруг оси.

Доказательство. а) Точку X называют *неподвижной точкой* преобразования f, если $f(X) = X$. Движение сферы, имеющее три неподвижные точки, не лежащие на одной сферической прямой, тождественно.

Пусть f — движение сферы, A — точка сферы, не являющаяся неподвижной. Рассмотрим симметрию s относительно плоскости Π (проходящей через центр сферы), при которой точка A переходит в точку $f(A)$. Если X — неподвижная точка преобразования f, то (евклидово) расстояние от точки X до точки A равно расстоянию от точки $X = f(X)$ до точки $f(A)$. Следовательно, точка X лежит в плоскости Π, а значит, преобразование $s \circ f$ имеет неподвижные точки X и A.

Эта конструкция позволяет построить движение $s_1 \circ \ldots \circ s_k \circ f$, где $k \leq 3$, имеющее три неподвижные точки, не лежащие на одной сферической прямой. Таким образом, $s_1 \circ \ldots \circ s_k \circ f = \mathrm{id}$ (тождественное преобразование) и $f = s_k^{-1} \circ \ldots \circ s_1^{-1} = s_k \circ \ldots \circ s_1$.

б) Симметрия относительно плоскости, проходящей через центр сферы, изменяет ориентацию сферы. Поэтому композиция нечетного количества симметрий изменяет ориентацию, а композиция четного количества симметрий сохраняет ориентацию. А так как любое движение сферы можно представить в виде s_1, $s_1 \circ s_2$ или $s_1 \circ s_2 \circ s_3$, то любое движение сферы, сохраняющее ориентацию, можно представить в виде $s_1 \circ s_2$.

Легко проверить, что композиция двух симметрий относительно плоскостей, пересекающихся по прямой l под углом φ, является поворотом на угол 2φ вокруг оси l. $\square$.

Сферическая геометрия обладает очень важным свойством: любую точку A можно движением перевести в любую точку B, переведя при этом любую прямую, проходящую через точку A, в любую прямую, проходящую через точку B. Из этого, в частности, следует, что в формулировках теорем сферической геометрии не нужно указывать, о какой именно точке или прямой идет речь. А если бы мы попытались строить геометрию для планеты несимметричной формы, то для каждой точки пришлось бы формулировать отдельную теорему.

Понятие изометрии можно определить не только для отображений множества на себя, но и для отображений одного множества на другое. Ясно, что сфера и плоскость не изометричны, т.е. не существует изометрии сферы на плоскость. В самом деле, расстояние между точками сферы ограничены, а расстояние между точками плоскости неограничены.

Более содержателен вопрос о том, изометрична ли область на сфере некоторой области на плоскости. Иными словами, можно ли нарисовать на плоскости карту некоторой области на сфере так, чтобы расстояние между любой парой точек сферы равнялось расстоянию между парой соответствующих точек плоскости.

Теорема 1.3. *Область на сфере не может быть изометрична области на плоскости.*

Доказательство. Назовем *сферической окружностью* множество точек сферы, удаленных от некоторой точки сферы (*центра* окружности) на данное расстояние r (*радиус* окружности). Если отрезок OX виден из центра сферы под углом α, то сферическая окружность с центром O, проходящая через точку X, имеет сферический радиус $R\alpha$, а евклидов радиус этой окружности равен $R\sin\alpha$. Таким образом, сферическая окружность радиуса $r = R\alpha$ имеет длину

$$2\pi R\sin\alpha = 2\pi R\sin(r/R) < 2\pi R(r/R) = 2\pi r.$$

Любая область на сфере содержит сферическую окружность достаточно малого радиуса r. Длина этой сферической окружности меньше длины евклидовой окружности радиуса r. Но при изометрии окружность радиуса r должна перейти в окружность того же радиуса, причем длина ее останется прежней. □

Замечание. Чтобы не рассматривать длину окружности, можно рассмотреть длину стороны правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса r.

Для сферической геометрии можно определить *полярное соответствие*, при котором каждой большой окружности S сопоставляется пара концов диаметра сферы, перпендикулярного S, а каждой паре диаметрально противоположных точек A и B сопоставляется большая окружность, лежащая в плоскости, перпендикулярной AB. Будем говорить, что большой окружности сопоставляется ее *полюса*, а паре диаметрально противоположных точек сопоставляется их *поляра*. Легко проверить, что если две большие окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A_1 и A_2, та поляра точек A_1 и A_2 совпадает с большой окружностью, проходящей через полюса больших окружностей S_1 и S_2. Таким образом, полярное преобразование переводит точки в прямые, а прямые в точки, причем утверждение "прямые l и m пересекаются в точке A" переходит в утверждение "точки $l^{\perp}$ и $m^{\perp}$ лежат на прямой $A^{\perp}$".

Сферическому треугольнику ABC можно сопоставить полярный ему треугольник $A'B'C'$ следующим образом: A' — тот из полюсов сферической прямой BC, который лежит вместе с точкой A по одну сторону от этой прямой; точки B' и C' определяются аналогично. Легко проверить следующие свойства полярного треугольника:

1) если треугольник $A'B'C'$ полярен треугольнику ABC, то треугольник ABC полярен треугольнику $A'B'C'$;

2) если α, β и γ — углы треугольника ABC, aR, bR и cR — длины его сторон (R — радиус сферы), то $\pi - a$, $\pi - b$ и $\pi - c$ — углы полярного треугольника $A'B'C'$, $(\pi-\alpha)R$, $(\pi-\beta)R$ и $(\pi-\gamma)R$ — длины его сторон.

Для доказательства свойства 1) рассмотрим центр O сферы. Так как $OA' \perp OC$ и $OB' \perp OC$, то $OC \perp OA'B'$.

Свойство 2) следует из того, что внутренние нормали к двугранному углу величиной α образуют между собой угол $\pi - \alpha$.

В сферической геометрии, в отличие от евклидовой, треугольники с соответственно равными углами обязательно равны. В самом деле, из равенства углов двух треугольников следует равенство сторон их полярных треугольников.

Таким образом, в сферической геометрии можно вычислить площадь треугольника, зная его углы.

Теорема 1.4. *Площадь сферического треугольника ABC с углами α, β и γ равна*

$$(\alpha+\beta+\gamma-\pi)R^2,$$

где R — радиус сферы.

Доказательство. Рассмотрим сначала *сферический двуугольник*, т.е. одну из четырех фигур, на которые разбивают сферу две сферические прямые. Пусть $S(\alpha)$ — площадь сферического двуугольника с углом α. Ясно, что $S(\alpha)$ пропорциональна α и $S(\pi) = 2\pi R^2$ (площадь полусферы). Поэтому $S(\alpha) = 2\alpha R^2$.

Пары сферических прямых AB, BC и CA образуют 12 сферических двуугольников. Выберем из них 6 сферических двуугольников, содержащих либо треугольник ABC, либо симметричный ему (относительно центра сферы) треугольник $A_1B_1C_1$. Каждая точка треугольника ABC и треугольника $A_1B_1C_1$ покрыта ровно тремя такими двуугольниками, а любая другая точка сферы покрыта ровно одним двуугольником (точки сферических прямых AB, BC и CA мы не рассматриваем). Поэтому

$$4(\alpha+\beta+\gamma)R^2 = 4\pi R^2 + 2S_{ABC} + 2S_{A_1B_1C_1}$$

А так как $S_{ABC} = S_{A_1B_1C_1}$, то

$$S_{ABC} = (\alpha+\beta+\gamma-\pi)R^2.$$

□

Следствие 1. *Сумма углов сферического треугольника больше π.*

Задачи

Радиус сферы R предполагается известным. a, b, c — длины сторон сферического треугольника, α, β, γ — углы сферического треугольника.

1. Доказать, что $a + b > c$.

2. Доказать, что $a + b + c < 2\pi R$.

3. Найти длину стороны правильного сферического треугольника, вписанного в сферическую окружность радиуса r.

4. Найти углы *автополярного* треугольника, т.е. сферического треугольника, совпадающего с полярным к нему треугольником.

5. Доказать, что область цилиндра изометрична области плоскости.

6. Существует ли отображение области сферы на область плоскости, переводящее отрезки сферических прямых в отрезки евклидовых прямых?

7. Доказать, что для любого сферического треугольника существуют вписанная и описанная окружности.

8. Доказать, что а) медианы, б) высоты сферического треугольника пересекаются в одной точке.

9. Доказать, что площадь сферического круга радиуса r равна

$$4\pi R^2 \sin^2\left(\frac{r}{2R}\right).$$

В задачах 10–14 считается, что $R = 1$.

10. Доказать, что в сферическом треугольнике выполняются следующие соотношения:

а) $\dfrac{\sin\alpha}{\sin a} = \dfrac{\sin\beta}{\sin b} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin c}$ (теорема синусов);

б) $\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha$ (первая теорема косинусов);

в) $\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$ (вторая теорема косинусов).

11. Доказать, что

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}},\ \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}},$$

где $p = (a+b+c)/2$.

12. Пусть $S = \alpha+\beta+\gamma-\pi$. Доказать, что

а) $2\sin\dfrac{S}{2} = \dfrac{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$;

б) $\operatorname{tg}^2\dfrac{S}{4} = \operatorname{tg}\dfrac{p}{2}\operatorname{tg}\dfrac{p-a}{2}\operatorname{tg}\dfrac{p-b}{2}\operatorname{tg}\dfrac{p-c}{2}$.

13. Пусть r — радиус вписанной окружности сферического треугольника. Доказать, что

$$\operatorname{tg} r = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}.$$

14. Пусть $\bar{R}$ — радиус описанной окружности сферического треугольника. Доказать, что

$$\operatorname{ctg}\bar{R} = \sqrt{\frac{\sin(\alpha-s)\sin(\beta-s)\sin(\gamma-s)}{\sin s}},$$

где $s = (\alpha+\beta+\gamma-\pi)/2$.

15. а) Возьмем отрезок сферической прямой длины αR и рассмотрим поляры всех сферических прямых, пересекающих данный отрезок.

Доказать, что рассматриваемые точки заметают множество площади $4\alpha R^2$.

б) Дано несколько отрезков сферических прямых, сумма длин которых меньше πR. Доказать, что существует сферическая прямая, не пересекающая ни одного данного отрезка.

2. Проективная геометрия

Геометрия Лобачевского не имеет столь простой и естественной интерпретации, как сферическая геометрия. Для геометрии Лобачевского известно несколько моделей. У каждой из них есть свои достоинства, но и у каждой есть недостатки, т.е. для разных целей бывают удобны разные модели. Все модели геометрии Лобачевского, которые мы будем рассматривать, достаточно тесно связаны с проективной геометрией. Поэтому сначала нужно познакомиться с основными понятиями проективной геометрии.

При проецировании прямой l_1 на прямую l_2 из некоторой точки O длины отрезков могут не сохранятся. Но если мы для четырех точек A_1, B_1, C_1 и D_1 прямой l_1 рассмотрим величину $\dfrac{C_1A_1}{C_1B_1} : \dfrac{D_1A_1}{D_1B_1}$, то при проекциях эта величина сохраняется, т.е.

$$\frac{C_1A_1}{C_1B_1} : \frac{D_1A_1}{D_1B_1} = \frac{C_2A_2}{C_2B_2} : \frac{D_2A_2}{D_2B_2} \quad \text{(см. рис. 2.1).}$$

В самом деле,

$$\frac{C_1A_1}{C_1B_1} = \frac{S_{OC_1A_1}}{S_{OC_1B_1}} = \frac{OC_1 \cdot OA_1 \sin A_1OC_1}{OC_1 \cdot OB_1 \sin B_1OC_1} = \frac{OA_1}{OB_1} \cdot \frac{\sin A_1OC_1}{\sin B_1OC_1}.$$

Поэтому

$$\frac{C_1A_1}{C_1B_1} : \frac{D_1A_1}{D_1B_1} = \left(\frac{OA_1}{OB_1} \cdot \frac{\sin A_1OC_1}{\sin B_1OC_1}\right) : \left(\frac{OA_1}{OB_1} \cdot \frac{\sin A_1OD_1}{\sin B_1OD_1}\right).$$

После сокращения эта величина окажется выраженной только через углы, причем $\sin A_1OC_1 = \sin A_2OC_2$ и т.д.

Величину $\dfrac{CA}{CB} : \dfrac{DA}{DB}$ удобно брать со знаком. Для этого нужно на прямой l ввести координаты и вместо, например, CA брать $c-a$, где c и a — координаты точек C и A. Величину $\dfrac{c-a}{c-b} : \dfrac{d-a}{d-b}$ называют *двойным отношением* четырех точек. В дальнейшем мы будем обычно считать, что величина $\dfrac{CA}{CB} : \dfrac{DA}{DB}$ берется со знаком; обозначим ее $[A, B, C, D]$.

Двойное отношение четырех точек зависит от порядка точек. При перестановках точек оно меняется по достаточно простым правилам. Очевидно, что $[A, B, C, D] = [B, A, C, D]^{-1} = [A, B, D, C]^{-1}$. Легко проверить также, что $[A, B, C, D] = 1 - [A, C, B, D]$ (это эквивалентно равенству $(c-a)(d-b) = (c-b)(d-a) + (b-a)(d-c)$).

Назовем преобразование прямой *проективным*, если оно сохраняет двойное отношение любых четырех точек. Ясно, что любое преобразование прямой, которое можно представить в виде композиции нескольких проецирований, является проективным преобразованием.

Отображение вида $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$, где $ad \neq bc$, назовем *дробно-линейным.*

Теорема 2.1. *Преобразование прямой проективно тогда и только тогда, когда оно дробно-линейно.*

Доказательство. С помощью формулы

$$\frac{ax+b}{cx+d} - \frac{ay+b}{cy+d} = \frac{(ad-bc)(x-y)}{(cx+d)(cy+d)}$$

легко проверить, что дробно-линейное отображение сохраняет двойное отношение.

Рассмотрим теперь преобразование прямой, сохраняющее двойное отношение. Пусть α_1, β_1 и γ_1 — образы трех различных точек α, β и γ. Тогда точка x и ее образ x_1 связаны соотношением

$$\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta} : \frac{x-\alpha}{x-\beta} = \frac{\gamma_1-\alpha_1}{\gamma_1-\beta_1} : \frac{x_1-\alpha_1}{x_1-\beta_1}.$$

Это соотношение позволяет выразить x_1 через x по формуле вида $x_1 = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. $\square$

Дробно-линейное преобразование $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ не определено для точки $x = -d/c$. Чтобы избежать этой неприятности, добавим к прямой l точку ∞. Тогда можно считать, что

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \infty \quad \text{при} \quad x = -\frac{d}{c} \qquad \text{и} \qquad \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} \quad \text{при} \quad x = \infty$$

Точку ∞ можно добавить к прямой следующим образом. Выберем точку O вне прямой l и сопоставим каждой точке $A \in l$ прямую OA.

Тогда точке ∞ соответствует прямая, проходящая через точку O параллельно прямой l. Назовем *проективной прямой* множество всех прямых на плоскости, проходящих через фиксированную точку O. При этом прямые, проходящие через точку O, будем называть *точками проективной прямой*.

На проективной прямой можно следующим образом ввести координаты. Будем считать, что точка O — начало системы координат на плоскости. Тогда прямая, проходящая через точку O, состоит из точек вида $(\lambda x, \lambda y)$, где λ — некоторое число, x и y — фиксированные числа, причем хотя бы одно из них отлично от нуля. Таким образом, точке проективной прямой можно сопоставить пару чисел (x, y), причем пары (x, y) и $(\lambda x, \lambda y)$ считаются эквивалентными. Эту пару чисел назовем *однородными координатами* точки проективной прямой.

В однородных координатах проективное преобразование проективной прямой имеет вид

$$(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy).$$

По аналогии с проективной прямой дадим два эквивалентных определения *проективной плоскости*:

1) множество прямых, проходящих через фиксированную точку в пространстве;

2) множество троек чисел (x, y, z), где числа x, y и z не все равны нулю; пропорциональные тройки считаются эквивалентными.

Если числа a, b и c не все равны нулю, то множество точек проективной плоскости, удовлетворяющих уравнению $ax + by + cz = 0$, называют *прямой на проективной плоскости*.

Проективным преобразованием проективной плоскости называют преобразование вида

$$(x, y, z) \mapsto (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z.)$$

Подчеркнем, что это должно быть именно преобразование, т.е. взаимно однозначное отображение проективной плоскости на себя. На языке определителей условие взаимной однозначности эквивалентно тому, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Проективное преобразование проективной плоскости сохраняет двойное отношение четырех точек, лежащих на одной прямой. В самом деле, не более чем одна из трех однородных координат точек данной проективной прямой тождественно равна нулю. Две другие координаты можно считать однородными координатами на проективной прямой. Проективное преобразование плоскости индуцирует проективное преобразование этих координат.

Проективную плоскость можно представить как обычную плоскость, пополненную бесконечно удаленной прямой $z = 0$. В самом деле, точке (x, y, z), где $z \neq 0$, можно сопоставить точку с декартовыми координатами $\left(\dfrac{x}{z}, \dfrac{y}{z}\right)$.

Перейдем теперь к построению одной из моделей геометрии Лобачевского. Предварительно покажем, как с помощью двойного отношения можно определить "расстояние" между точками a и b интервала (x, y). (Мы имеем в виду не обычное евклидово расстояние.) Положим

$$\rho(a, b) = |\ln[a, b, x, y]| = |\ln\left(\frac{x-a}{x-b} : \frac{y-a}{y-b}\right)|.$$

Легко проверить, что такое определение имеет смысл, т.е.

$$\frac{x-a}{x-b} : \frac{y-a}{y-b} > 0.$$

В самом деле, $x - a < 0$, $x - b < 0$, $y - a > 0$, $y - b > 0$. Ясно также, что $\rho(a, a) = 0$ и $\rho(a, b) \to \infty$ при $b \to x$ и при $b \to y$. Кроме того, $\rho(a, b) = \rho(b, a)$, так как

$$\frac{x-a}{x-b} : \frac{y-a}{y-b} = \left(\frac{x-b}{x-a} : \frac{y-b}{y-a}\right)^{-1}$$

Отметим, что $\ln[a, b, x, y] = -\ln[a, b, y, x]$, поэтому нет необходимости различать точки x и y, т.е. задавать ориентацию интервала (x, y).

Из тождества

$$\left(\frac{x-a}{x-b} \cdot \frac{y-b}{y-a}\right)\left(\frac{x-b}{x-c} \cdot \frac{y-c}{y-b}\right)\left(\frac{x-c}{x-a} \cdot \frac{y-a}{y-c}\right) = 1$$

следует, что $\pm\rho(a, b) \pm \rho(b, c) \pm \rho(c, a) = 0$. Более тщательная проверка показывает, что если точка c лежит между a и b, то $\rho(a, c) + \rho(c, b) = \rho(a, b)$.

Расстояние $\rho(a, b)$ не изменяется при проективных преобразованиях прямой, сохраняющих интервал (x, y).

Теперь можно определить *модель Клейна* плоскости Лобачевского. Точками модели Клейна являются внутренние точки некоторого круга.

Расстояние между точками a и b определяется как $\rho(a,b)$ [1] для интервала (x,y), где x и y — точки пересечения прямой ab с граничной окружностью данного круга. Если точки расположены в таком порядке, как на рис. 2.2, то $\ln[a,b,x,y] > 0$, т.е. $\rho(a,b) = \ln[a,b,x,y]$.

Теорема 2.2. *В модели Клейна прямыми являются хорды круга.*

Доказательство. Нужно доказать, что $\rho(a,c)+\rho(c,b) \geq \rho(a,b)$, причем если точка c не лежит на отрезке (a,b), то $\rho(a,c)+\rho(c,b) > \rho(a,b)$. Пусть лучи ab и ba пересекают окружность в точках x и y соответственно, лучи ac и ca — в точках x_1 и y_1, лучи cb и bc — в точках x_2 и y_2 (рис. 2.3). Тогда точка x' пересечения хорд x_1x_2 и xy лежит на отрезке xb, а точка y' пересечения хорд y_1y_2 и xy лежит на отрезке ay. Пусть p — точка пересечения прямых x_1x_2 и y_1y_2, c' — точка пересечения прямых pc и xy. Точка c' лежит на отрезке ab.

Двойное отношение сохраняется при проекции одной прямой на другую. Поэтому

$$[a,c,x_1,y_1] = [a,c',x',y']$$

$$[c,b,x_2,y_2] = [c',b,x',y']$$

(мы рассматриваем проекции из точки p на прямую xy).

Покажем, что $[a,c',x',y'] > [a,c',x,y]$ и $[c',b,x',y'] > [c',b,x,y]$. Иными словами, нужно доказать, что если точки a,b,x,y расположены в таком порядке, как на рис. 2.2, то увеличение отрезка xy приводит к уменьшению двойного отношения $[a,b,x,y]$. Будем считать положительным направление луча yx. Тогда для увеличения отрезка xy к координате точки x нужно добавить положительное число ε. Второй конец отрезка оставим пока на месте. Двойное отношение при этом уменьшится, так как

$$\frac{x-a}{x-b} - \frac{x+\varepsilon-a}{x+\varepsilon-b} = \frac{\varepsilon(b-a)}{(x-b)(x+\varepsilon-b)} > 0$$

Для второго конца отрезка доказательство аналогично.

В результате получаем неравенства

$$[a,c,x_1,y_1] > [a,c',x,y],$$

$$[c,b,x_2,y_2] > [c',b,x,y].$$

[1] Это не совсем верно. Как будет объяснено в главе 3, в модели Клейна обычно полагают $\rho(a,b) = \frac{1}{2}|\ln[a,b,x,y]|$ или $\rho(a,b) = \frac{c}{2}|\ln[a,b,x,y]|$, где параметр c играет роль радиуса. Радиус удобно считать равным 1.

Следовательно,

$$[a, c, x_1, y_1][c, b, x_2, y_2] > [a, c', x, y][c', b, x, y] = [a, b, x, y],$$

т.е. $\rho(a, c) + \rho(c, b) > \rho(a, b)$. $\square$

Геометрия Лобачевского, как и сферическая геометрия и геометрия плоскости, имеет достаточно большую группу изометрий, а именно, любую точку A можно перевести в любую другую точку B и при этом перевести любую прямую, проходящую через точку A, в любую прямую, проходящую через точку B. Чтобы доказать это, достаточно проверить, что существует преобразование плоскости, которое сохраняет двойное отношение, переводит данный круг в себя и переводит внутреннюю точку A в любую другую внутреннюю точку B. В самом деле, такое преобразование является изометрией. А для того, чтобы перевести любую прямую в любую другую прямую, можно точку A перевести в центр O круга, а затем точку O перевести в точку B. При этом любую прямую, проходящую через точку O, можно поворотом перевести в любую другую прямую, проходящую через точку O.

Теорема 2.3. *Существует преобразование плоскости, которое сохраняет двойное отношение, переводит данный круг в себя и переводит его центр в произвольную внутреннюю точку.*

Доказательство. Рассмотрим прямой круговой конус с вершиной S. Сечение конуса плоскостью, перпендикулярной его оси, является окружностью с диаметром PQ и центром O. Рассмотрим также сечение конуса плоскостью, проходящей через точку O и перпендикулярной плоскости SPQ (конус мы считаем бесконечным в одну сторону). Если точка Q' принадлежит интервалу QR (рис. 2.4), то рассматриваемое сечение является эллипсом.

На плоскости Π', содержащей этот эллипс, и на плоскости Π, содержащей окружность с диаметром PQ, можно ввести координаты так, что окружность и эллипс совпадут при отождествлении точек с одинаковыми координатами. При этом в качестве начала координат мы выберем соответственно центр эллипса и центр окружности, а в качестве оси Ox выберем прямые $P'Q'$ и PQ. Тогда точка O, лежащая внутри эллипса, отождествляется с такой точкой O_1 круга, что $P'O : OQ' = PO_1 : O_1Q$.

При перемещении точки Q' по отрезку QR отношение $P'O : OQ'$ изменяется от 1 до ∞. Поэтому точка O_1 может быть любой точкой, лежащей внутри отрезка OQ.

Искомым преобразованием является композиция отображений $f : \Pi \to \Pi_1$ и $g : \Pi \to \Pi_1$ где f — проекция из точки S, а g — отождествление точек с одинаковыми координатами. $\square$

Задачи

1. Доказать, что проективное преобразование прямой однозначно задается образами трех точек.

2. Доказать, что любое проективное преобразование прямой можно представить в виде композиции проецирований прямых.

3. Доказать, что квадрат нетождественного преобразования $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ тождествен тогда и только тогда, когда $a+d=0$.

4. а) Показать, что при отождествлении диаметрально противоположных точек сферы из сферической геометрии получается геометрия проективной плоскости.

б) Показать, что при этом полярное соответствие принимает следующий вид: точке (a,b,c) соответствует прямая $ax+by+cz=0$.

5. Доказать, что сечение прямого кругового конуса $x^2+y^2=az^2$ плоскостью, не проходящей через его вершину, является либо эллипсом, либо параболой, либо гиперболой.

6. Существует ли проективное преобразование плоскости, сохраняющее окружность, но переводящее ее внутренние точки во внешние?

7. Сколько различных значений принимает двойное отношение четырех точек при перестановках этих точек?

8. Убедитесь, что если точка c лежит между a и b, то равенство $\pm\rho(a,b)\pm\rho(b,c)\pm\rho(a,c)=0$ принимает вид $\rho(a,c)+\rho(c,b)=\rho(a,b)$.

9. Как с помощью циркуля и линейки выполнить следующие построения в модели Клейна:

а) построить середину данного отрезка;

б) соединить данную точку с данной прямой кратчайшим отрезком (т.е. опустить перпендикуляр);

в) построить биссектрису угла между данными двумя прямыми?

10. Доказать, что любое дробно-линейное преобразование можно представить в виде композиции не более, чем трех инволютивных преобразований. (Преобразование называется *инволютивным*, если его композиция с собой есть тождественное преобразование.)

3. Модели геометрии Лобачевского

От модели Клейна можно перейти к другой важной модели геометрии Лобачевского. Новая модель получается следующим образом. Рассмотрим сферу, экватором которой служит данная окружность. Пусть A — точка модели Клейна, A_1 — точка южной полусферы, проецирующаяся в точку A, A' — точка пересечения экваториальной плоскости с прямой A_1N, где N — северный полюс (рис. 3.1). Сопоставив каждой точке A точку A', получим преобразование экваториального круга. Чтобы это преобразование было изометрией, нужно определить расстояние между точками A' и B' в новой модели как расстояние между точками A и B в старой модели. Полученную таким образом модель геометрии Лобачевского называют *моделью Пуанкаре в круге*.

Выясним, как устроены прямые в модели Пуанкаре. Хорде AB соответствует сечение южной полусферы плоскостью, перпендикулярной экватору. Это сечение представляет собой полуокружность, перпендикулярную экваториальной окружности (рис. 3.2). При проекции из полюса на экваториальную плоскость эта полуокружность переходит в дугу окружности, перпендикулярной экваториальной окружности. (Это следует из свойств стереографической проекции, которые будут разобраны на семинаре.) Таким образом, для модели Пуанкаре в круге прямыми являются дуги окружностей, перпендикулярных граничной окружности данного круга.

Для модели Пуанкаре данный круг удобно считать единичным кругом на комплексной плоскости. (*Единичный круг* задается неравенством $|z| \leq 1$, $z \in \mathbb{C}$.)

Для точек комплексной плоскости, как и для точек вещественной прямой, можно рассмотреть двойное отношение

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}.$$

В этом случае двойное отношение является, вообще говоря, комплексным числом.

Нетрудно убедиться, что если точки Z и W лежат на хорде AB, а Z' и W' — соответствующие точки модели Пуанкаре, то

$$|[A, B, Z, W]| = |[A, B, Z', W']|^2.$$

В самом деле, стереографическая проекция является ограничением пространственной инверсии, поэтому она сохраняет двойное отношение. Кроме того,

$$AZ : ZB = \frac{AC^2}{AB} : \frac{BC^2}{AB} = AC^2 : BC^2$$

(см. рис. 3.2). Таким образом, $|\ln[A, B, Z, W]| = 2|\ln|[A, B, Z', W']||$.

Напомним, что $\rho(Z, W) = |\ln[A, B, Z, W]|$. Поэтому

$$\rho(Z', W') = 2|\ln|[A, B, Z', W']||.$$

По аналогии с бесконечным семейством различных сферических геометрий (для разных радиусов R мы получаем разные геометрии) можно получить бесконечное семейство геометрий Лобачевского, положив $\rho(Z,W)=\dfrac{c}{2}|\ln[A,B,Z,W]|$. Роль параметра c в геометрии Лобачевского во многом аналогична роли радиуса R в сферической геометрии.

Еще одну модель геометрии Лобачевского можно получить, отобразив единичный круг на верхнюю полуплоскость $H=\{x+iy\in\mathbb{C}\mid y>0\}$ с помощью дробно-линейного отображения. Для этой цели годится, например, отображение

$$z\mapsto w=i\frac{1+z}{1-z}.$$

В самом деле,

$$\Im w=\Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1+z}{1-z}+\frac{1+\bar z}{1-\bar z}\right)=\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$$

Поэтому $\Im w>0\iff |z|<1$.

Полученная таким образом модель геометрии Лобачевского называется *моделью Пуанкаре в верхней полуплоскости*.

Геометрию Лобачевского часто называют *гиперболической* геометрией. Поэтому прямые, окружности и другие объекты геометрии Лобачевского будем называть *гиперболическими*, чтобы отличать их от евклидовых прямых и окружностей.

Дробно-линейные преобразования переводят прямые и окружности в прямые и окружности. Кроме того, они сохраняют углы. Поэтому в верхней полуплоскости H гиперболическими прямыми являются вертикальные лучи и полуокружности, центры которых лежат на действительной оси.

Дробно-линейные отображения сохраняют двойное отношение, поэтому расстояние между точками в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости определяется следующим образом. Пусть гиперболическая прямая AB подходит к вещественной оси в точках X и Y (рис. 3.3). Тогда

$$\rho(A,B)=c|\ln[A,B,X,Y]|.$$

(Для краткости мы опустили второй знак модуля. Дело в том, что несложная проверка позволяет убедиться в его ненужности.) В том случае, когда гиперболическая прямая является евклидовым лучом, положим $Y=\infty$, т.е. $\dfrac{y-a}{y-b}=1$. Для положительного луча мнимой оси формула для вычисления гиперболического расстояния принимает особенно простой вид: $\rho(ia,ib)=c|\ln(a/b)|$.

Выясним теперь, как устроены движения плоскости Лобачевского. Любое дробно-линейное преобразование, сохраняющее верхнюю полуплоскость H, является движением плоскости Лобачевского. Пусть $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Легко проверить, что отображения $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, где $ad - bc > 0$, и $z \mapsto \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, где $ad-bc < 0$, сохраняют верхнюю полуплоскость. В самом деле,

$$\Im\frac{az+b}{cz+d} = \Im\frac{(c\bar{z}+d)(az+b)}{|cz+d|^2} = \Im\frac{bc\bar{z}+adz}{|cz+d|^2} = (ad-bc)\frac{\Im z}{|cz+d|^2}$$

$$\Im\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} = (bc-ad)\frac{\Im z}{|cz+d|^2}$$

Теорема 3.1. *Любое (гиперболическое) движение верхней полуплоскости H имеет вид*

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \quad \textit{или} \quad z \mapsto \frac{a(-\bar{z})+b}{c(-\bar{z})+d},$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc > 0$.

Доказательство. Геометрия Лобачевского обладает тем свойством, что точка C лежит на отрезке AB тогда и только тогда, когда $\rho(A, C) + \rho(C, B) = \rho(A, B)$. Из этого свойства следует, что любая изометрия переводит гиперболическую прямую в гиперболическую прямую.

Предположим, что изометрия φ переводит положительный луч L мнимой оси в гиперболическую прямую $\varphi(L)$, подходящую к вещественной оси в точках x и y. Тогда одно из двух преобразований $z \mapsto \pm\dfrac{z-x}{z-y}$ является гиперболическим движением g^{-1}, причем это движение переводит гиперболическую прямую $\varphi(L)$ в L (если $y = \infty$, то $g(z) = z - x$.) Таким образом, изометрия $g^{-1}\varphi$ переводит гиперболическую прямую L в себя. Применив, если нужно, изометрию $z \mapsto kz (k > 0)$, можно считать, что изометрия $g^{-1}\varphi$ оставляет точку i на месте. Следовательно, точка $ia (a \in \mathbb{R})$ переходит в такую точку ib, что $\rho(i, ia) = \rho(i, ib)$, т.е. $|\ln a| = |\ln b|$. В том случае, когда изометрия $g^{-1}\varphi$ переставляет гиперболические лучи (i, ∞) и $(i, 0)$, применим дополнительно изометрию $z \mapsto -z^{-1}$. Для полученной изометрии $g^{-1}\varphi$ вариант $b = a^{-1}$ отпадает, поэтому она оставляет неподвижными все точки гиперболической прямой L.

Для вычисления гиперболического расстояния d между точками $z, w \in H$ можно использовать формулу

$$\operatorname{ch}\left(\frac{d}{c}\right) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2\Im(z)\Im(w)},$$

где $\operatorname{ch} t = \dfrac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ — *гиперболический косинус*. Эту формулу можно получить, вычислив координаты точек в которых гиперболическая прямая zw подходит к вещественной оси, а затем вычислив соответствующее двойное отношение. Но такой способ требует громоздких вычислений. Проверить эту формулу можно проще. Обе ее части инвариантны относительно вещественных дробно-линейных преобразований с положительным определителем (для правой части формулы достаточно проверить инвариантность относительно преобразований $z \mapsto z + a$, $a \in \mathbb{R}$, и $z \mapsto -1/z$). Преобразованием такого вида прямую zw можно перевести в положительный луч L мнимой оси, а для точек $ix, iy \in L$ легко проверить, что обе части формулы дают один и тот же результат, а именно, $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$.

Для всех положительных чисел t изометрия $g^{-1}\varphi$ оставляет точку it неподвижной, поэтому для всех $z \in H$ выполняется равенство

$$\rho(it, z) = \rho(it, g^{-1}\varphi(z)).$$

Пусть $z = x + iy$, $g^{-1}\varphi(z) = u + iv$. Из формулы для вычисления расстояния следует, что

$$\frac{|it - z|^2}{t\Im(z)} = \frac{|it - g^{-1}\varphi(z)|^2}{t\Im(g^{-1}\varphi(z))},$$

т.е. $[x^2 + (t-y)^2]v = [u^2 + (t-v)^2]y$. Это равенство выполняется для всех положительных t, поэтому $y = v$ и $x^2 = u^2$, т.е. $g^{-1}\varphi(z) = z$ или $-\bar{z}$. А так как изометрия является непрерывным отображением, то одно их этих равенств выполняется для всех точек одновременно. Поэтому $\varphi(z) = g(z)$ или $\varphi(z) = g(-\bar{z})$. $\square$

Замечание. В формулировке теоремы 3.1 можно считать, что $ad - bc = 1$. В самом деле, пусть $ad - bc = t > 0$. Поделим числа a, b, c и d на $\sqrt{t}$. В результате получим то же самое преобразование, но для новых коэффициентов a, b, c и d требуемое условие будет выполняться.

Сферическую геометрию и геометрию Лобачевского можно построить единым образом. Точнее говоря, речь будет идти не о сферической геометрии, а о так называемой *эллиптической* геометрии, которая получается из сферической геометрии отождествлением диаметрально противоположных точек.

Для единообразного построения эллиптической и гиперболической геометрии нам потребуется *комплексное проективное пространство* $\mathbb{C}P^2$. Оно определяется аналогично вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$, но вместо троек вещественных чисел берутся тройки комплексных чисел; тройки считаются эквивалентными, если они получаются друг из друга умножением на комплексное число.

Важное значение будет для нас иметь также кривая $x^2+y^2+z^2=0$ в $\mathbb{C}P^2$.

Рассмотрим точки $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ и $P_2=(x_2,y_2,z_2)$, лежащие на сфере $x^2+y^2+z^2=R^2$. Эти точки можно также считать точками $\mathbb{C}P^2$. Прямая P_1P_2 в $\mathbb{C}P^2$ пересекает кривую $x^2+y^2+z^2=0$ в точках J_1 и J_2. Покажем, что

$$e^{\pm 2i\varphi}=[P_1,P_2,J_1,J_2],$$

где φ — угол между радиусами OP_1 и OP_2. В самом деле, прямая P_1P_2 в $\mathbb{C}P^2$ состоит из точек вида

$$(x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2)$$

где $\lambda\in\mathbb{C}\cup\infty$ (точке P_1 соответствует $\lambda=0$, а точке P_2 соответствует $\lambda=\infty$). Значения λ, соответствующие точкам J_1, и J_2, удовлетворяют уравнению

$$(x_1+\lambda x_2)^2+(y_1+\lambda y_2)^2+(z_1+\lambda z_2)^2=0,$$

т.е. $1+(2\cos\varphi)\lambda+\lambda^2=0$ (мы воспользовались тем, что $x_1^2+y_1^2+z_1^2=R^2, x_2^2+y_2^2+z_2^2=R^2$ и $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=R^2\cos\varphi$). Следовательно,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{\cos\varphi\pm\sqrt{\cos^2\varphi-1}}{\cos\varphi\mp\sqrt{\cos^2\varphi-1}}=\frac{\cos\varphi\pm i\sin\varphi}{\cos\varphi\mp i\sin\varphi}=e^{\pm 2i\varphi}.$$

С другой стороны,

$$[P_1,P_2,J_1,J_2]=\frac{\lambda_1-0}{\lambda_2-0}:\frac{\lambda_1-\infty}{\lambda_2-\infty}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Таким образом,

$$[P_1,P_2,J_1,J_2]=e^{\pm 2i\varphi}.$$

Поэтому расстояние d между точками сферы радиуса R можно определить по формуле

$$d=R\varphi=\pm\frac{R}{2i}\ln[P_1,P_2,J_1,J_2], \tag{1}$$

где ln — функция, обратная экспоненте. Это определение требует некоторых пояснений, так как рассматриваются функции комплексного переменного, причем тождество $e^{2\pi i} = 1$ показывает, что обратная функция многозначная. Но мы никаких пояснений давать не будем, потому что в наиболее интересном для нас случае геометрии Лобачевского аналогичная формула содержит лишь функции действительного переменного.

Напомним, как была получена формула (1). Мы рассмотрели точки $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$ как точки $\mathbb{C}^3$, затем сопоставили им прямые OP_1 и OP_2, а эти прямые рассмотрели как элементы $\mathbb{C}P^2$. Точки P_1 и P_2 лежат в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{C}^3$ на поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. В $\mathbb{C}^3$ можно рассмотреть не только сферу действительного радиуса, но и сферу мнимого радиуса $x^2 + y^2 + z^2 = -c^2$, $c \in \mathbb{R}$. По сути дела, радиус R мы заменяем на ic.

Как и в случае обычной сферы, для сферы мнимого радиуса удобно ограничиться вещественными точками. Положим $z_1 = iz$. Тогда получим поверхность $x^2 + y^2 - z_1^2 = -c^2$. При вещественных x, y и z_1 эта поверхность представляет собой двуполостный гиперболоид (рис. 3.4). Отметим также, что при указанном преобразовании поверхность $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ превращается в поверхность $x^2 + y^2 - z_1^2 = 0$, которая при вещественных x, y и z_1 является конусом. Пусть P_1 и P_2 — точки верхней полости двуполостного гиперболоида $x^2 + y^2 - z_1^2 = -c^2$. Рассмотрим их как точки $\mathbb{C}P^2$. Прямая P_1P_2 в $\mathbb{C}P^2$ пересекает кривую $x^2 + y^2 - z^2{}_1 = 0$ в точках J_1 и J_2. По аналогии с эллиптической геометрией определим расстояние между точками P_1 и P_2 по формуле

$$d = \pm\frac{ic}{2i}\ln[P_1, P_2, J_1, J_2] = \pm\frac{c}{2}\ln[P_1, P_2, J_1, J_2].$$

Оказывается, что в результате получится геометрия Лобачевского! В самом деле, рассмотрим сечение D^2 конуса $x^2 + y^2 - z_1^2 \le 0$ некоторой плоскостью, перпендикулярной оси конуса. Лучи OP_i и OJ_i пересекают D^2 в точках P_i' и J_i', причем $[P_1, P_2, J_1, J_2] = [P_1', P_2', J_1', J_2']$. Таким образом, спроецировав верхнюю полость двуполостного гиперболоида на D^2 из начала координат, получим модель Клейна геометрии Лобачевского.

Отметим, что по аналогии с формулой

$$\cos^2\left(\frac{d}{R}\right) = \frac{(u, v)^2}{(u, u)(v, v)},$$

где $u = \overrightarrow{OP_1}$, $v = \overrightarrow{OP_2}$, можно записать формулу

$$\cos^2\left(\frac{id}{c}\right) = \frac{[u, v]^2}{[u, u][v, v]},$$

где $[u,v] = u_1v_1 + u_2v_2 + (iu_3)(iv_3) = u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3$. Так как $\cos t = \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}$, то $\cos(it) = \dfrac{e^{-t}+e^{t}}{2} = \operatorname{ch} t$. Поэтому $\cos\left(\dfrac{id}{c}\right) = \operatorname{ch}\left(\dfrac{d}{c}\right)$. Формула

$$\operatorname{ch}^2\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{[u,v]^2}{[u,u][v,v]}$$

действительно верна; ее можно проверить непосредственными вычислениями.

Задачи

1. Доказать, что преобразование, обратное дробно-линейному, тоже дробно-линейно.

2. Доказать, что любое дробно-линейное преобразование можно представить в виде композиции преобразований вида $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ и $z \mapsto az + b$.

3. Доказать, что при дробно-линейном преобразовании комплексной плоскости прямая или окружность переходит в прямую или окружность.

4. Доказать, что дробно-линейные преобразования сохраняют углы.

5. а) Доказать, что точки $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \in \mathbb{R}$

б) Доказать, что точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной прямой или окружность тогда и только тогда, когда $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$

6. Доказать, что если $\Im z_1 > 0$ и $\Im z_2 > 0$, то существует преобразование $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, где $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$, переводящее z_1 в z_2. ($SL(2,\mathbb{R})$ — множество матриц 2×2 с вещественными элементами и определителем 1.)

7. а) Доказать, что стереографическая проекция представляет собой ограничение на сферу инверсии в пространстве.

б) Доказать, что стереографическая проекция переводит окружности на сфере в окружности или прямые на плоскости и сохраняет углы.

в) Доказать, что стереографическая проекция сохраняет двойное отношение.

8. Доказать, что точке z в модели Пуанкаре в единичном круге соответствует точка $\dfrac{2z}{|z|^2+1}$ в модели Клейна.

9. Доказать формулу

$$\operatorname{ch}\left(\frac{d}{c}\right) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2\Im(z)\Im(w)}$$

прямыми вычислениями.

10. Доказать, что гиперболическая окружность в модели Пуанкаре является евклидовой окружностью (с другим центром).

11. Доказать неравенство треугольника в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости.

12. Найти минимальное гиперболическое расстояние от точки (x, y) верхней полуплоскости до луча Oy.

13. а) Доказать, что при движении точки прямой $x = 1$ по направлению к оси Ox расстояние от нее до прямой Oy бесконечно возрастает.

б) Доказать, что при движении точки вдоль гиперболической прямой $(x-1)^2+y^2 = 1$ по направлению к точке $(0,0)$ расстояние от нее до прямой Oy стремится к нулю.

14. Доказать, что все точки евклидовой прямой $y = kx$, лежащие в верхней полуплоскости, равноудалены от гиперболической прямой Oy.

15. Доказать, что множество точек, равноудаленных от двух данных точек, представляет собой гиперболическую прямую.

16. Пусть $A_i = (x_1 + \lambda_i x_2, y_1 + \lambda_i y_2, z_1 + \lambda_i z_2) \in \mathbb{C}P^2$. Доказать, что

$$[A_1, A_2, A_3, A_4] = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} : \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2}.$$

17. Доказать непосредственно формулу

$$\operatorname{ch}\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{[u, v]^2}{[u, u][v, v]},$$

где $d = \pm\frac{c}{2}\ln[P_1, P_2, J_1, J_2]$, $u = \overrightarrow{OP_1}$, $v = \overrightarrow{OP_2}$.

18. Доказать, что если все углы гиперболического многоугольника меньше $180°$, то он выпуклый.

19. Доказать, что в модели Клейна (гиперболическая) окружность представляет собой (евклидову) окружность или эллипс.

4. Гиперболическая элементарная геометрия

В гиперболической геометрии понятие *величины угла* можно определить следующим образом. Будем говорить, что величина угла равна $2\pi/n$, если n углов с общей вершиной, конгруэнтных данному углу, покрывают всю плоскость Лобачевского без наложений. Теперь легко определить угол величиной $2\pi m/n$, а затем по непрерывности можно определить величину любого угла.

Для модели Клейна и для модели Пуанкаре в круге повороты вокруг центра круга являются движениями. Поэтому в центре круга в обеих моделях величины гиперболических углов совпадают с величинами евклидовых углов. Центр круга гиперболическим движением можно перевести в любую другую точку. Для модели Пуанкаре движения сохраняют евклидовы углы, поэтому для нее понятие величины евклидова угла совпадает с понятием величины гиперболического угла. (Угол между двумя пересекающимися окружностями определяется как угол между касательными в точке пересечения.) Для модели Клейна движения не обязательно сохраняют евклидовы углы, поэтому для нее величина гиперболического угла не обязательно совпадает с величиной евклидова угла.

На евклидовой плоскости через точку A можно провести лишь одну прямую, параллельную данной прямой. На плоскости Лобачевского через точку A можно провести целое семейство прямых, не пересекающих данную прямую l. Такие прямые заполняют пару вертикальных углов (на рис. 4.1 изображены эти углы в модели Клейна и моделях Пуанкаре). Среди образовавшихся четырех углов с вершиной A выделим тот, который содержит прямую l. Стороны этого угла назовем *лучами, параллельными прямой* l. Прямые, содержащие эти лучи, назовем *прямыми, параллельными прямой* l. В геометрии Лобачевского следует говорить именно о параллельных лучах, а не параллельных прямых, потому что два луча, на которые точка A разбивает прямую, ведут себя по-разному по отношению к параллельной ей прямой: один луч приближается, а другой удаляется.

Углом параллельности для точки A и прямой l называют половину величины угла, образованного лучами с вершиной A, параллельными прямой l.

Угол параллельности α обладает следующим свойством. Опустим из точки A перпендикуляр AH на прямую l. Проведем из точки A луч AB, образующий угол β с лучом AH. Луч AB пересекает прямую l тогда и только тогда, когда $\beta < \alpha$. Это свойство можно взять в качестве определения угла параллельности.

Легко проверить, что угол параллельности α зависит лишь от расстояния a от точки до прямой. Выясним, как именно связаны a и α. Это несложно сделать в любой из моделей. Рассмотрим, например, модель Клейна, причем будем считать, что точка A совпадает с центром круга (рис. 4.2). По определению

$$a = \frac{c}{2}\left|\ln\left(\frac{XH}{XA}\cdot\frac{YA}{YH}\right)\right| = \frac{c}{2}\ln\left(\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\right) = c\ln(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}).$$

Следовательно, $e^{-a/c} = \operatorname{tg}(\alpha/2)$. При $a/c \to 0$ получаем $\alpha \to \pi/2$, т.е. при уменьшении расстояния a или при увеличении “мнимого радиуса” c геометрия Лобачевского приближается к евклидовой геометрии.

В дальнейшем для упрощения формул будем считать, что $c = 1$.

В гиперболической геометрии сумма углов треугольника меньше π. Это утверждение легко доказать в модели Пуанкаре в круге, поместив одну из вершин треугольника в центр круга (рис. 4.3). В самом деле, угол A гиперболического треугольника ABC равен углу A евклидова треугольника, а углы при вершинах B и C у гиперболического треугольника меньше.

В евклидовой геометрии стороны и углы треугольника связаны некоторыми соотношениями. В геометрии Лобачевского тоже выполняются определенные соотношения между элементами треугольника. Проще всего получить соотношения для прямоугольного треугольника, поэтому с него мы и начнем.

Величины углов треугольника ABC будем обозначать α, β и γ, а длины противолежащих им сторон будем обозначать a, b и c.

Теорема 4.1. *В треугольнике с прямым углом γ выполняются следующие соотношения:*

а) $\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$;

б) $\operatorname{th} a = \operatorname{sh} b \operatorname{tg} \alpha$.

Доказательство. а) Можно считать, что $A = ki$ $(k > 1)$, $B = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и $C = i$. Тогда $\operatorname{ch} a = \dfrac{1}{\sin\varphi}$, $\operatorname{ch} b = \dfrac{1+k^2}{2k}$ и $\operatorname{ch} c = \dfrac{1+k^2}{2k\sin\varphi}$. Поэтому $\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \operatorname{ch} c$.

При малых a, b и c соотношение $\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \operatorname{ch} c$ превращается в соотношение $a^2 + b^2 = c^2$. Таким образом, соотношение $\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \operatorname{ch} c$ можно назвать *гиперболической теоремой Пифагора*.

б) Снова будем считать, что $A = ki$ $(k > 1)$, $B = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и $C = i$. Пусть x_0 — центр евклидовой окружности, содержащей гиперболическую прямую AB. Тогда $x_0^2 + k^2 = (\cos\varphi - x_0)^2 + \sin^2\varphi$, т.е. $k^2 = 1 - 2x_0\cos\varphi$. Легко проверить, что $\angle Ax_0O = \alpha$. Поэтому

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k}{|x_0|} = \frac{2k\cos\varphi}{k^2 - 1}.$$

Так как $\operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch}^2 t - 1$, то

$$\operatorname{sh}^2 a = \frac{1}{\sin^2\varphi} - 1 = \left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^2 \text{ и } \operatorname{sh}^2 b = \left(\frac{1+k^2}{2k}\right)^2 - 1 = \left(\frac{k^2-1}{2k}\right)^2.$$

Следовательно, $\cos\varphi = \operatorname{th} a$ и $\dfrac{k^2-1}{2k} = \operatorname{sh} b$, а значит, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{th} a}{\operatorname{sh} b}$.

При малых a и b это соотношение превращается в $\operatorname{tg}\alpha = a/b$. □

Из соотношений $\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$ и $\operatorname{th} a = \operatorname{sh} b \operatorname{tg}\alpha$ с помощью тождеств для тригонометрических и гиперболических функций можно получить другие соотношения, например, $\operatorname{sh} a = \operatorname{sh} c \sin\alpha$, $\operatorname{th} b = \operatorname{th} c \cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ch} c$, $\cos\alpha = \operatorname{ch} a \sin\beta$. При малых a, b и c эти соотношения принимают вид $a = c\sin\alpha$, $b = c\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta = 1$, $\cos\alpha = \sin\beta$.

Для произвольного треугольника в гиперболической геометрии справедливы теоремы, аналогичные теоремам синусов и косинусов в евклидовой планиметрии.

Теорема 4.2. *Для произвольного треугольника выполняются следующие соотношения:*

а) $\dfrac{\operatorname{sh} a}{\sin\alpha} = \dfrac{\operatorname{sh} b}{\sin\beta} = \dfrac{\operatorname{sh} c}{\sin\gamma}$ *(теорема синусов);*

б) $\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos\alpha$ *(теорема косинусов.)*

Доказательство. Опустим из вершины C перпендикуляр CH на прямую AB. Будем для определенности считать, что точка H лежит на отрезке AB (случай, когда точка H лежит вне отрезка AB, рассматривается аналогично). Обозначим длины отрезков CH, AH и BH через h, x и $c - x$ соответственно.

а) Запишем соотношения вида $\operatorname{sh} a = \operatorname{sh} c \sin\alpha$ для прямоугольных треугольников ACH и CBH. В результате получим $\operatorname{sh} b \sin\alpha = \operatorname{sh} h = \operatorname{sh} a \sin\beta$. Следовательно,

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\sin\alpha} = \frac{\operatorname{sh} b}{\sin\beta}.$$

□

б) Запишем соотношения вида $\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \operatorname{ch} c$ для прямоугольных треугольников ACH и CBH. В результате получим $\operatorname{ch} b = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} h$ и $\operatorname{ch} a = \operatorname{ch}(c-x)\operatorname{ch} h$. Следовательно, $\operatorname{ch} a = (\operatorname{ch} c \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} c \operatorname{sh} x)\operatorname{ch} h = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} b \operatorname{sh} c \operatorname{th} x$. Кроме того, $\operatorname{th} x = \operatorname{th} b \cos\alpha$. □

Выясним теперь, как выглядит в модели Пуанкаре *окружность*, т.е. множество точек, равноудаленных от данной точки. Для модели Пуанкаре в верхней полуплоскости гиперболическая окружность радиуса r с центром (a, b) задается уравнением

$$\operatorname{ch} r = 1 + \frac{(a-x)^2 + (b-y)^2}{2by},$$

т.е. $(x-a)^2+(y-b\operatorname{ch} r)^2 = b^2(\operatorname{ch}^2 r-1)$. Таким образом, в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости гиперболическая окружность радиуса r с центром (a,b) представляет собой евклидову окружность радиуса $b\sqrt{\operatorname{ch}^2 r-1}$ с центром $(a, b\operatorname{ch} r)$.

Для модели Пуанкаре в круге Δ гиперболическая окружность тоже представляет собой евклидову окружность, так как дробно-линейное преобразование переводит окружность в окружность или прямую. Если центр гиперболической окружности совпадает с центром круга Δ, то евклидов центр этой окружности тоже совпадает с центром круга Δ. Покажем, что в такой ситуации евклидов радиус R и гиперболический радиус r связаны соотношением

$$e^r = \frac{1+R}{1-R}, \quad \text{т.е.} \quad R = \frac{e^r-1}{e^r+1} = \operatorname{th}\left(\frac{r}{2}\right)$$

В самом деле, пусть O — центр круга Δ, X — точка рассматриваемой окружности, A и B — точки в которых прямая OX пересекает границу круга Δ. Тогда

$$r = \left|\ln\left(\frac{AX}{AO}\cdot\frac{BO}{BX}\right)\right| = \ln\left(\frac{1+R}{1-R}\right).$$

Обсудим теперь, как измерять длины кривых в гиперболической геометрии. Для определения длины кривой с помощью интеграла требуется *элемент длины*, т.е. расстояние между бесконечно близкими точками. Если Δs — гиперболическое расстояние между точками z и $z+\Delta z$ верхней полуплоскости, то

$$\operatorname{ch}(\Delta s) \approx 1 + \frac{|\Delta z|^2}{2(\Im z)^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{ch}(\Delta s) \approx 1 + \frac{(\Delta s)^2}{2}.$$

Поэтому $\Delta s \approx \dfrac{|\Delta z|}{\Im z}$, т.е. $ds = \dfrac{|dz|}{\Im z} = \dfrac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}$.

Для перехода от модели Пуанкаре в верхней полуплоскости H к модели Пуанкаре в круге Δ можно воспользоваться отображением $z \mapsto w = \dfrac{z-i}{z+i}$. Это отображение переводит верхнюю полуплоскость H в единичный круг Δ. Несложные вычисления показывают, что

$$\frac{|dz|}{\Im z} = \frac{2|dw|}{1-|w|^2}.$$

Таким образом, в модели Пуанкаре в круге Δ элемент гиперболической длины получается из элемента евклидовой длины умножением на

$\dfrac{2}{1-|w|^2}$. Следовательно, гиперболическая длина евклидовой окружности радиуса R с центром в центре круга Δ равна $2\pi R\left(\dfrac{2}{1-R^2}\right)$. Напомним, что эта кривая является гиперболической окружностью радиуса r, где r и R связаны соотношением $R = \operatorname{th}\left(\dfrac{r}{2}\right)$. Поэтому длина гиперболической окружности радиуса r равна

$$\frac{4\pi \operatorname{th}\left(\frac{r}{2}\right)}{1-\operatorname{th}^2\left(\frac{r}{2}\right)} = 2\pi \operatorname{sh} r.$$

Замечание 1. Длина гиперболической окружности больше длины евклидовой окружности того же радиуса, а длина сферической окружности меньше.

Замечание 2. Теорему синусов во всех трех геометриях можно сформулировать одинаково, а именно:

$$\frac{l(a)}{\sin\alpha} = \frac{l(b)}{\sin\beta} = \frac{l(c)}{\sin\gamma},$$

где $l(r)$ — длина окружности радиуса r.

Площадь сферического треугольника можно вычислить по формуле $S = R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$. При замене R на ic получим формулу для площади треугольника в гиперболической геометрии: $S = c^2(\pi-\alpha-\beta-\gamma)$. Эти рассуждения можно превратить в полное доказательство, применив теорему о том, что две аналитические функции, совпадающие при всех вещественных значениях, должны совпадать и при всех чисто мнимых значениях. Нас такой путь доказательства не устраивает, но все же из этих рассуждений можно извлечь некоторую пользу. Например, они позволяют предположить, что величина $\delta = \pi - (\alpha+\beta+\gamma)$ пропорциональна площади гиперболического треугольника. Назовем эту величину *дефектом* гиперболического треугольника. Выпуклый n-угольник можно разрезать диагоналями на $n-2$ треугольника. Легко убедиться, что сумма их дефектов равна $(n-2)\pi - \Sigma\alpha_i$, где $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ — углы n-угольника. Назовем *дефектом* гиперболического n-угольника с углами $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ величину $\delta = (n-2)\pi - \Sigma\alpha_i$; при этом n-угольник не обязательно выпуклый. Вместо внутренних углов α_i удобнее рассматривать внешние углы $\alpha_i' = \pi - \alpha_i$. Дело в том, что дефект многоугольника с внешними углами α_i' равен $(\Sigma\alpha_i') - 2\pi$.

Легко проверить, что дефект обладает следующими свойствами:

1) Дефект любого многоугольника положителен.

2) Если многоугольники M_1 и M_2 равны, то $\delta(M_1) = \delta(M_2)$.

3) Если многоугольник M разрезан на многоугольники M_1 и M_2, то $\delta(M) = \delta(M_1) + \delta(M_2)$.

Площадь многоугольника естественно определить как функцию на множестве многоугольников, обладающую свойствами 1)–3). Можно доказать, что свойства 1)–3) определяют функцию на многоугольниках с точностью до пропорциональности (мы это доказывать не будем). Поэтому дефект многоугольника с точностью до пропорциональности равен его площади. Для определения коэффициента пропорциональности k можно воспользоваться тем, что при малых a и b площадь прямоугольного треугольника с катетами a и b должна быть приблизительно равна $ab/2$. Для такого треугольника

$$\sin\delta = \cos(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{th} a \operatorname{th} b}{\operatorname{th}^2 c} - \frac{\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b}{\operatorname{sh}^2 c} = \frac{\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b}{\operatorname{sh}^2 c}(\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - 1) \approx \frac{ab}{c^2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{ab}{2}.$$

Поэтому $k = 1$. Напомним, что мы условились считать параметр c равным 1. Чтобы не путать этот параметр с длиной гипотенузы, временно обозначим его r. Тогда $\sin\delta = \dfrac{ab}{2r^2}$. Поэтому в общем случае $k = r^2$.

Другой подход к определению площади фигуры в гиперболической геометрии заключается в разбиении фигуры на бесконечно малые прямоугольники. Подробнее этот подход мы обсудим на семинаре.

Задачи

1. а) Доказать, что соотношение $e^{-a/c} = \operatorname{tg}(\alpha/2)$ эквивалентно соотношениям $\operatorname{ch}\left(\dfrac{a}{c}\right)\sin\alpha = 1$, $\operatorname{sh}\left(\dfrac{a}{c}\right)\operatorname{tg}\alpha = 1$ и $\operatorname{th}\left(\dfrac{a}{c}\right) = \cos\alpha$.

б) Доказать соотношение $e^{-a/c} = \operatorname{tg}(\alpha/2)$, используя одну из моделей Пуанкаре.

2. Доказать, что стороны и углы треугольника связаны следующими соотношениями:

а) $\operatorname{ch} a \sin\beta = \operatorname{ch} b \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma$;

б) $\operatorname{ch} a = \dfrac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$.

3. В модели Клейна сторона гиперболического угла проходит через центр круга Δ. Доказать, что если этот угол острый, то его величина меньше величины соответствующего евклидова угла.

4. Доказать, что треугольник и круг — выпуклые фигуры.

5. Доказать, что если соответственные углы двух треугольников равны, то равны и сами треугольники.

6. Доказать,что ортогональная проекция одной из сторон острого угла на другую сторону представляет собой ограниченное множество.

7. Доказать,что стороны и углы треугольника с прямым углом γ связаны следующими соотношениями: $\operatorname{sh} a = \operatorname{sh} c \sin\alpha$, $\operatorname{th} b = \operatorname{th} c\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ch} c$, $\cos\alpha = \operatorname{ch} a\sin\beta$.

8. а) Доказать, что при $\alpha < \dfrac{(n-2)\pi}{n}$ существует правильный n-угольник, все углы которого равны α и все стороны которого равны.

б) Доказать, что если a и r — сторона и радиус вписанной окружности правильного n-угольника с углом α, то

$$\operatorname{ch} r = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}, \quad \operatorname{ch}\frac{a}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

в) При каких n существует правильный n-угольник с углом $\alpha = \dfrac{2\pi}{n}$ (т.е. с суммой углов 2π)?

9. Три угла четырехугольника равны $\pi/2$, а четвертый угол равен γ. Найти γ, если известны длины a и b сторон, соединяющих прямые углы.

10. Доказать, что если $w = \dfrac{z-i}{z+i}$, то

$$\frac{|dz|}{\Im z} = \frac{2|dw|}{1-|w|^2}$$

11. Доказать, что в модели Клейна элемент длины имеет вид

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 - (xdy - ydx)^2}{(1-x^2-y^2)^2}$$

12. а) Доказать, что в моделях Пуанкаре в верхней полуплоскости и в единичном круге площадь бесконечно малого прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, равна $\dfrac{dxdy}{y^2}$ и $\dfrac{dxdy}{1-(x^2+y^2)}$ соответственно.

б) Рассмотрим в модели Клейна бесконечно малый прямоугольник, образованный линиями $\rho = \mathrm{const}$, $\varphi = \mathrm{const}$, где ρ, φ — полярные координаты. Доказать, что длины его сторон равны

$$\frac{d\rho}{1-\rho^2} \quad u \quad \frac{\rho d\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

13. Доказать, что площадь круга радиуса r равна $4\pi\operatorname{sh}^2\left(\dfrac{r}{2}\right)$.

14. а) Доказать, что перпендикуляр, восставленный из середины стороны AB треугольника ABC, перпендикулярен прямой, соединяющей середины сторон AC и BC.

б) Пусть $X \mapsto X'$ — изометричное отображение одной прямой на другую. Доказать, что середины отрезков XX' либо совпадают, либо лежат на одной прямой.

15. Доказать, что в одной точке пересекаются а)биссектрисы треугольника; б)медианы треугольника; в)высоты остроугольного треугольника.

Всегда ли медианы делятся точкой пересечения в одном и том же отношении?

16. (Теорема Менелая) Прямая l пересекает стороны BC, CA и AB треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1. Доказать, что

$$\frac{\operatorname{sh} AC_1}{\operatorname{sh} C_1B} \cdot \frac{\operatorname{sh} BA_1}{\operatorname{sh} A_1C} \cdot \frac{\operatorname{sh} CB_1}{\operatorname{sh} B_1A} = 1.$$

17. (Теорема Чевы) На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1. Доказать, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих эквивалентных соотношений:

а) $\dfrac{\sin ACC_1}{\sin C_1CB} \cdot \dfrac{\sin BAA_1}{\sin A_1AC} \cdot \dfrac{\sin CBB_1}{\sin B_1BA} = 1;$

б) $\dfrac{\operatorname{sh} AC_1}{\operatorname{sh} C_1B} \cdot \dfrac{\operatorname{sh} BA_1}{\operatorname{sh} A_1C} \cdot \dfrac{\operatorname{sh} CB_1}{\operatorname{sh} B_1A} = 1.$

В задачах 18–21 $p = \dfrac{a+b+c}{2}, \quad \delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$

18. Доказать,что

$$\sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{sh}(p-b)\operatorname{sh}(p-c)}{\operatorname{sh} b \operatorname{sh} c}, \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sh} p \operatorname{sh}(p-a)}{\operatorname{sh} b \operatorname{sh} c}.$$

19. Доказать, что

а) $2\sin\dfrac{\delta}{2} = \dfrac{\sqrt{\operatorname{sh} p \operatorname{sh}(p-a)\operatorname{sh}(p-b)\operatorname{sh}(p-c)}}{\operatorname{ch}\frac{a}{2}\operatorname{ch}\frac{b}{2}\operatorname{ch}\frac{c}{2}};$

б) $\operatorname{tg}^2\dfrac{\delta}{4} = \operatorname{th}\dfrac{p}{2}\operatorname{th}\dfrac{p-a}{2}\operatorname{th}\dfrac{p-b}{2}\operatorname{th}\dfrac{p-c}{2}.$

20. Пусть r — радиус вписанной окружности треугольника. Доказать, что

$$\operatorname{th} r = \sqrt{\frac{\operatorname{sh}(p-a)\operatorname{sh}(p-b)\operatorname{sh}(p-c)}{\operatorname{sh} p}}.$$

21. Пусть R — радиус описанной окружности треугольника (если она существует). Доказать, что

$$\operatorname{th} R = \sqrt{\frac{\sin\frac{\delta}{2}}{\sin(\alpha+\frac{\delta}{2})\sin(\beta+\frac{\delta}{2})\sin(\gamma+\frac{\delta}{2})}} = \frac{2\operatorname{sh}\frac{a}{2}\operatorname{sh}\frac{b}{2}\operatorname{sh}\frac{c}{2}}{\sqrt{\operatorname{sh} p\operatorname{sh}(p-a)\operatorname{sh}(p-b)\operatorname{sh}(p-c)}}.$$

22. Записать площадь треугольника с нулевыми углами в виде двойного интеграла, используя модель Пуанкаре в верхней полуплоскости.

5. Три типа собственных движений плоскости Лобачевского

Для геометрии Лобачевского можно доказать следующую теорему, аналогичную теореме 1.2 (а) для сферической геометрии.

Теорема 5.1. *Любое движение плоскости Лобачевского можно представить в виде композиции не более чем трех симметрий относительно прямых.*

Доказательство. Напомним основную идею доказательства этой теоремы в случае сферической геометрии. Пусть g — некоторая изометрия, причем $g(A) = B \neq A$. Рассмотрим симметрию s относительно прямой $l = \{X | AX = BX\}$. Тогда $sg(A) = A$. Кроме того, если $g(Y) = Y$, то $Y \in l$, а значит, $sg(Y) = Y$. Поэтому изометрия sg имеет по крайней мере одну дополнительную неподвижную точку по сравнению с g. Применив такую конструкцию не более трех раз, можно построить изометрию, имеющую три неподвижные точки, не лежащие на одной прямой.

Эту схему доказательства можно применить и в случае геометрии Лобачевского. Но для этого нужно ответить на следующие вопросы:

1) Почему множество точек, равноудаленных от двух данных точек, представляет собой гиперболическую прямую?

2) Что такое “симметрия относительно прямой” в случае гиперболической геометрии?

3) Почему движение гиперболической плоскости, имеющее три неподвижные точки, не лежащие на одной прямой, тождественно?

Ответим на эти вопросы последовательно.

1) Можно считать, что данные точки имеют вид ia, ib $(a, b \in \mathbb{R})$. Тогда множество точек $(x, y) \in H$, равноудаленных от них, задается уравнением

$$\frac{x^2 + (a-y)^2}{ay} = \frac{x^2 + (b-y)^2}{by},$$

т.е. $x^2 + y^2 = ab$.

2) Назовем точки A и A^* *симметричными* (или *инверсными*) относительно окружности S, если любая окружность, проходящая через точки A и A^*, ортогональна окружности S. В том случае, когда S — прямая, это определение тоже имеет смысл; оно эквивалентно обычному определению симметрии относительно прямой.

Понятие симметричности двух точек относительно окружности сохраняется при дробно-линейных преобразованиях.

Можно проверить, что точки A и A^* симметричны относительно окружности S тогда и только тогда, когда лучи OA и OA^* совпадают и $OA \cdot OA^* = R^2$, где R — радиус окружности S.

Назовем точки A и A^* *симметричными* относительно гиперболической прямой в модели Пуанкаре, если они симметричны относительно евклидовой окружности, содержащей эту прямую. В том случае, когда гиперболическая прямая является частью евклидовой прямой, легко проверить, что точки, симметричные относительно прямой, равноудалены от нее. Кроме того, симметрия относительно гиперболической прямой является изометрией.

3) На третий вопрос мы дадим подробный ответ, а именно, опишем все возможные множества неподвижных точек движений плоскости Лобачевского. Согласно теореме 3.1 нужно рассмотреть два типа движений.

а) Уравнение $z = \dfrac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d}$ приводится к виду

$$-cz\bar{z} + dz + a\bar{z} - b = 0,$$

т.е.

$$-c(x^2 + y^2) + dx + ax - b = 0, \quad dy - ay = 0.$$

При $a \neq d$ последнее уравнение имеет единственное решение $y = 0$. В таком случае $z \notin H$. Если же $a = d$, то множеством неподвижных точек является некоторая гиперболическая прямая.

б) Уравнение $z = \dfrac{az + b}{cz + d}$ является квадратным. Оно имеет корни

$$z_{1,2} = \frac{a - d \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c}.$$

Можно считать, что $ad - bc = 1$. В таком случае

$$D = (d-a)^2 + 4bc = (a+d)^2 - 4.$$

Поэтому

$D = 0 \Longleftrightarrow |a+d| = 2$ (*параболическое* движение),
$D > 0 \Longleftrightarrow |a+d| > 2$ (*гиперболическое* движение),
$D < 0 \Longleftrightarrow |a+d| < 2$ (*эллиптическое* движение).

Неподвижные точки преобразования $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ в зависимости от знака D выглядят так, как показано на рис. 5.1. Отметим, что лишь в случае $D < 0$ одна из неподвижных точек является неподвижной точкой движения плоскости Лобачевского. Все остальные неподвижных точки лежат вне верхней полуплоскости H.

Мы ответили на все три вопроса. Тем самым, доказательство теоремы 5.1 завершено. □

Обсудим более подробно собственные движения плоскости Лобачевского. Собственное движение можно представить в виде композиции двух симметрий относительно прямых. В плоскости Лобачевского пары прямых бывают трех типов: параллельные, не пересекающиеся (и не параллельные) и пересекающиеся. Покажем, что композиции симметрий относительно таких пар прямых представляют собой соответственно параболические, гиперболические и эллиптические движения.

Прежде всего выясним, к какому простейшему виду можно привести пару прямых с помощью движения.

1. Для пары пересекающихся прямых удобно воспользоваться моделью Пуанкаре в круге. Можно считать, что центр круга является точкой пересечения прямых. Тогда рассматриваемые прямые будут диаметрами круга. Композиция симметрий относительно них — поворот вокруг центра. Это преобразование имеет вид $z \mapsto e^{i\varphi}z$.

2. Для пары параллельных прямых удобно воспользоваться моделью Пуанкаре в верхней полуплоскости. При этом можно считать, что прямые сходятся к точке ∞, т.е. они являются лучами, параллельными оси Oy. Композиция симметрий относительно этих прямых имеет вид $z \mapsto z + h$.

3. Не пересекающиеся и не параллельные прямые будем называть *расходящимися* или *сверхпараллельными*. Покажем сначала, что расходящиеся прямые l_1 и l_2 имеют общий перпендикуляр m. Обратимся для этого к модели Пуанкаре в верхней полуплоскости. Можно считать, что прямая l_1 является лучом Oy (рис. 5.2). Проведем из точки O касательную OA к евклидовой окружности, содержащей гиперболическую прямую l_2. Легко проверить, что гиперболическая прямая m, соответствующая евклидовой окружности радиуса OA с центром O, перпендикулярна прямым l_1 и l_2.

Прямую m можно перевести в луч Oy. Тогда прямые l_1 и l_2 перейдут в полуокружности с центром O (рис. 5.3). Композиция инверсий относительно окружностей, содержащих их, имеет вид $z \mapsto kz, \quad k > 0$.

Собственное движение можно представить в виде композиции симметрий относительно прямых l_1 и l_2 многими разными способами. Для фиксированного собственного движения рассмотрим множество всех соответствующих ему прямых l_i. Назовем это множество *пучком прямых*. В соответствии с типом движения пучок прямых назовем *эллиптическим, параболическим* или *гиперболическим*. Эллиптический пучок состоит из прямых, проходящих через фиксированную точку; параболический пучок состоит из попарно параллельных прямых (т.е. из прямых, проходящих через фиксированную бесконечно удаленную точку); гиперболический пучок состоит из прямых, ортогональных фиксированной прямой.

С каждым пучком прямых можно связать семейство кривых, ортогональных всем прямым пучка. Это семейство кривых получается следующим образом. Рассмотрим все движения g, которые являются композициями симметрий относительно пар прямых данного пучка. Возьмем произвольную точку A плоскости Лобачевского и рассмотрим множество всех точек вида $g(A)$. На рис. 5.4 изображены полученные кривые для всех трех типов пучков прямых (при этом на самих прямых пучка нарисованы стрелки). Для эллиптического пучка использована модель Пуанкаре в круге, для двух других пучков — модель Пуанкаре в верхней полуплоскости.

В случае эллиптического пучка кривыми, ортогональными прямым пучка, являются окружности. Ортогональные кривые для параболического пучка называют *орициклами* или *предельными окружностями*. Второе из этих названий связано с тем, что эти кривые получаются при бесконечном увеличении радиуса окружности, касающейся данной прямой в данной точке. Ортогональные кривые для гиперболического пучка называют *гиперциклами* или *эквидистантами*. Второе название связано с тем, что все точки эквидистанты находятся на одном и том же расстоянии от прямой, которая ортогональна прямым данного гиперболического пучка прямых. Обычно эквидистантой (гиперциклом) называют множество точек, равноудаленных от данной прямой; эта кривая состоит из двух ветвей симметричных относительно данной прямой.

Выясним теперь, как устроены собственные движения для модели геометрии Лобачевского на верхней полости двуполостного гиперболоида $[x, x] = -c^2$, где $[x, x] = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$. Прежде всего отметим, что любое линейное преобразование, сохраняющее псевдоскалярное произведение $[x, y]$ и не меняющее местами верхнюю и нижнюю полости гиперболоида, индуцируют движение плоскости Лобачевского.

Любую плоскость можно задать уравнением $[x,a]=p$, где a — фиксированный вектор, p — фиксированное число. Определим *симметрию* относительно плоскости $[x,a]=0$ следующим образом. Положим $x\mapsto x'=x+\lambda a$, где число λ таково, что вектор $x+x'$ лежит в плоскости симметрии, т.е. $[x+x',a]=0$. В результате получим отображение

$$x\mapsto x-2\frac{[x,a]}{[a,a]}a.$$

Это определение имеет смысл при $[a,a]\neq 0$.

Плоскости, касательные к конусу $[x,x]=0$, задаются уравнениями вида $[x,a]=0$, где $[a,a]=0$. Именно относительно этих плоскостей симметрия не определена. Все остальные плоскости, проходящие через начало координат, либо пересекают двуполостный гиперболоид $[x,x]=-c^2$, либо не пересекают его и при этом не касаются конуса $[x,x]=0$. Прямым плоскости Лобачевского соответствуют лишь плоскости первого типа. Симметрии относительно этих плоскостей не переставляют полости гиперболоида, так как точки пересечения плоскости и гиперболоида остаются неподвижными.

Несложные вычисления показывают, что при $[a,a]\neq 0$ симметрия относительно плоскости $[x,a]=0$ сохраняет псевдоскалярное произведение, т.е. если $x\mapsto x'$ и $y\mapsto y'$, то $[x,y]=[x',y']$. Таким образом, симметрия относительно плоскости, пересекающей гиперболоид, соответствует симметрии относительно прямой в плоскости Лобачевского. Собственное движение плоскости Лобачевского, соответствующее композиции симметрий относительно пары плоскостей, будет эллиптическим, параболическим или гиперболическим в зависимости от расположения прямой пересечения плоскостей (соответственно: прямая пересекает гиперболоид, прямая принадлежит конусу, прямая лежит вне конуса).

Пусть плоскости $[x,a_1]=0$ и $[x,a_2]=0$ пересекаются по прямой, содержащей вектор b, т.е. $[b,a_1]=[b,a_2]=0$. Тогда плоскость $[x,b]=p$ переходит в себя при симметриях относительно этих плоскостей. В самом деле, при таких симметриях вектор x переходит в вектор $x'=x+\lambda a_i$, а значит, $[x',b]=[x,b]$. Следовательно, композиция симметрий относительно плоскостей $[x,a_1]=0$ и $[x,a_2]=0$ переводит плоскость $[x,b]=p$ в себя. Это означает, что окружность, орицикл и гиперцикл представляют собой сечение гиперболоида плоскостью $[x,b]=p$, где вектор b соответственно лежит внутри конуса, принадлежит конусу, лежит вне конуса.

Задачи

1. Доказать, что точки A и A^* симметричны относительно окружности радиуса R с центром O тогда и только тогда, когда лучи OA и OA^* совпадают и $OA \times OA^* = R^2$

2. Описать, как выглядит эллиптическое движение в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости.

3. Доказать, что любую пару параллельных прямых можно движением перевести в любую другую пару параллельных прямых.

4. а) Доказать, что две прямые, имеющие общий перпендикуляр, являются расходящимися.

б) Доказать, что общий перпендикуляр к двум прямым единствен.

5. Доказать, что в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости композиция симметрий относительно двух параллельных прямых, сходящихся к точке $p \in \mathbb{R}$, имеет вид $z \mapsto w$, где

$$\frac{1}{w-p} = \frac{1}{z-p} + h.$$

6. Доказать, что в модели Клейна любой пучок прямых соответствует семейству евклидовых прямых, имеющих общую точку (лежащую внутри, на границе или вне круга).

7. Доказать, что все орициклы попарно конгруэнтны.

8. Пусть C_1 и C_2 — две кривые, ортогональные прямым одного пучка.

а) Доказать, что все прямые пучка являются осями симметрии кривой C_1.

б) Доказать, что существует движение, переводящее C_1 в себя и при этом переводящее любую точку $A \in C_1$ в любую другую точку $B \in C_1$.

в) Доказать, что все точки кривой C_1 находятся на одном и том же расстоянии от кривой C_2.

9. а) Доказать, что любые три точки плоскости Лобачевского принадлежат либо одной окружности, либо одному орициклу, либо одному гиперциклу.

б) Доказать, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника принадлежат одному пучку прямых. Обязательно ли этот пучок эллиптический?

10. а) Доказать, что биссектрисы внешних углов треугольника принадлежат одному пучку прямых.

б) Доказать, что высоты треугольника принадлежат одному пучку.

11. Точка C перемещается по дуге AB окружности, орицикла или гиперцикла. Доказать, что при этом величина $\alpha + \beta - \gamma$ не изменяется (α, β и γ — углы треугольника ABC).

12. Доказать, что симметрия относительно плоскости сохраняет псевдоскалярное произведение.

13. Доказать, что симметрия относительно плоскости, не пересекающей гиперболоид $[x, x] = -c^2$, переставляет полости гиперболоида.

14. Как устроена композиция симметрий относительно плоскостей, пересекающихся а) по оси O_z; б) по оси O_x?

15. Как выглядят орициклы и эквидистанты в модели Пуанкаре в круге?

16. Привести пример движения плоскости Лобачевского, которое нельзя представить в виде композиции менее чем трех симметрий относительно прямых.

6. Замощение треугольниками сферы, плоскости и плоскости Лобачевского

Задача, которой мы будем заниматься на этой лекции, возникла у Пуанкаре в связи с построением функций , с помощью которых можно решать дифференциальные уравнения с алгебраическими коэффициентами.

Рассмотрим на евклидовой плоскости криволинейный треугольник, образованный тремя дугами окружностей или отрезками прямых. Для такого треугольника можно рассмотреть группу, порожденную отражениями (симметриями) относительно его сторон. Нас будут интересовать треугольники, при отражениях которых относительно сторон получается замощение, т.е. их образы при отражениях либо совпадают, либо не имеют общих внутренних точек. При этом совпадение подразумевается поточечное, т.е. совпадают не только сами треугольники, но и все их соответственные точки.

Не теряя общности можно считать, что две стороны криволинейного треугольника являются отрезками прямых (этого можно добиться, сделав инверсию с центром в одной из точек пересечения окружностей, содержащих стороны треугольника). Образы треугольника при отражениях относительно двух прямолинейных сторон составляют замощение тогда и только тогда, когда угол между этими сторонами равен π/n, где n — натуральное число. (Если не требовать поточечного совпадения образов, то угол может быть равен и $2\pi/n$.) Поэтому искомый треугольник должен иметь углы $(\pi/p, \pi/q, \pi/r)$; для краткости будем говорить, что такой треугольник имеет тип (p, q, r).

Задача об отражениях криволинейного треугольника с углами α, β, γ в зависимости от знака числа $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ фактически является задачей сферической, евклидовой или гиперболической геометрии. Точнее говоря, в случае $\alpha + \beta + \gamma - \pi > 0$ должны дополнительно выполняться три неравенства вида $\alpha + \beta < \gamma + \pi$, но для треугольника типа (p, q, r) такие неравенства выполняются автоматически.

Поясним более подробно, что мы имеем в виду. Напомним, что стороны AB и AC криволинейного треугольника ABC можно считать отрезками прямых. Пусть O — центр окружности, содержащей дугу BC. Если точки O и A лежат по одну сторону от прямой BC, то $\alpha + \beta + \gamma > \pi$, а если точки O и A лежат по разные стороны от прямой BC, то $\alpha+\beta+\gamma < \pi$. Поэтому $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ лишь в том случае, когда BC — отрезок прямой. Таким образом, если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то мы получаем задачу об отражениях относительно трех евклидовых прямых.

Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha + \beta + \gamma < \pi$, т.е. центр окружности S, одержащей дугу BC, и вершина A лежат по разные стороны от прямой BC. Проведем из точки A касательные AP и AQ к окружности S (рис. 6.1). Пусть S_1 — окружность радиуса AP с центром A. Тогда стороны треугольника ABC являются гиперболическими прямыми для модели Пуанкаре в круге S_1. Ясно также, что симметрии относительно сторон криволинейного треугольника ABC являются симметрии относительно гиперболических прямых.

Это простое рассуждение имеет важное следствие: в случае $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ все образы криволинейного треугольника ABC при отражениях относительно сторон лежат либо внутри некоторого круга, либо в некоторой полуплоскости.

Нам остается разобрать случай $\alpha + \beta + \gamma > \pi$. Такое неравенство еще не обеспечивает существование сферического треугольника с углами α, β, γ. Дополнительно должны выполняться три неравенства вида $\alpha + \beta < \pi + \gamma$, двойственных неравенствам вида $a + b > c$. Но если $\alpha, \beta, \gamma < \pi/2$, то неравенство $\alpha + \beta < \pi + \gamma$ выполняется автоматически. Поэтому будем считать, что существует сферический треугольник ABC с углами α, β и γ. Стереографическая проекция этого треугольника на плоскость, касающуюся сферы в вершине A, представляет собой криволинейный треугольник $AB'C'$ с углами α, β и γ, причем угол A прямолинейный. Легко проверить, что если криволинейные треугольники $AB'C'$ и AB_1C_1 с соответственно равными углами имеют общий прямолинейный угол A, то эти треугольники гомотетичны с центром гомотетии A. В самом деле, если O' и O_1 — центры окружностей, содержащих дуги $B'C'$ и B_1C_1, то треугольники $O'B'C'$ и $O_1B_1C_1$ являются равнобедренными треугольниками с параллельными боковыми сторонами, а значит, их основания $B'C'$ и B_1C_1 тоже параллельны. Поэтому, изменив при необходимости радиус сферы, можно добиться того, что образ сферического треугольника при стереографической проекции совпадет с рассматриваемым криволинейным треугольником на плоскости. Ясно также, что симметрии относительно сторон криволинейного треугольника соответствуют симметриям относительно сторон сферического треугольника. В самом деле, точки A и B симметричны относительно сферической прямой l тогда и только тогда, когда любая сферическая окружность пересекает сферическую прямую l под прямым углом. Поэтому при стереографической проекции точки, симметричные относительно сферической прямой l, переходят в точки, симметричные относительно образа l.

Чтобы найти все возможные сферические и евклидовы треугольники с углами $(\pi/p, \pi/q, \pi/r)$, нужно решить в натуральных числах соответственно неравенство $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} > 1$ и уравнение $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = 1$. Можно считать, что $p \leq q \leq r$. Тогда в обоих случаях $p \leq 3$. Несложный перебор приводит к сферическим треугольникам типа $(2,2,n)$, $(2,3,3)$, $(2,3,4)$, $(2,3,5)$ и евклидовым треугольникам типа $(3,3,3)$, $(2,4,4)$, $(2,3,6)$.

Непосредственно можно убедиться, что образы всех указанных треугольников при отражениях относительно их сторон составляют замощение сферы или евклидовой плоскости. Для евклидовых треугольников см. рис. 6.2. Для образов сферических треугольников при стереографической проекции можно нарисовать аналогичные картинки. В первых двух наиболее простых случаях см. рис. 6.3. Отметим, что требуемые замощения сферы (кроме первой серии треугольников) можно получить следующим образом. Соединим центр каждой грани правильного многогранника с вершинами и серединами сторон этой грани. Затем полученную систему отрезков (вместе с ребрами) спроецируем на описанную сферу из ее центра. Тогда для тетраэдра получим систему треугольников типа $(2,3,3)$, для куба и октаэдра получим систему треугольников типа $(2,3,4)$, а для додекаэдра и икосаэдра получим систему треугольников типа $(2,3,5)$.

Чтобы найти все возможные гиперболические треугольники с углами $(\pi/p, \pi/q, \pi/r)$, нужно решить в натуральных числах неравенство $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} < 1$. Это неравенство выполняется для всех достаточно больших чисел p, q, r, поэтому оно имеет бесконечно много решений. Можно доказать, что если $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} < 1$, то образы гиперболического треугольника типа (p, q, r) при отражениях относительно сторон заполняют без перекрытий всю гиперболическую плоскость. Доказательство этого утверждения не столь очевидно, как для евклидовой и сферической геометрии. Мы отложим его до лекции 8, которая посвящена доказательству более общей теоремы Пуанкаре о замощениях гиперболической плоскости многоугольниками.

Задачи

1. Найти все типы евклидовых треугольников, перекатывая которые через их стороны, можно замостить плоскость. (Дополнительно появляется треугольник с углами $(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$.)

2. Доказать, что группа порожденная отражениями относительно сторон треугольника $(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$, изоморфна подгруппе собственных движений в группе, порожденной отражениями относительно сторон треугольника $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$.

3. Доказать, что в группе, порожденной отражениями относительно сторон треугольника типа (p, q, r), можно выбрать такие образующие x, y и z, что $x^2 = y^2 = z^2 = 1$ и $(xy)^p = (yz)^q = (zx)^r = 1$.

4. Доказать, что группы, порожденные отражениями относительно сторон гиперболических треугольников $(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$ и $(0, 0, \frac{2\pi}{3})$, изоморфны.

5. Углы многоугольника, образованного дугами окружностей, кратны π. Обязательно ли его образы при симметриях относительно сторон не перекрываются?

6. Сколькими треугольниками с углами $\pi/2$, $\pi/3$ и $\pi/5$ можно замостить сферу?

7. Фундаментальная область модулярной группы

Пусть G — группа, порожденная отражениями относительно сторон треугольника T с углами $(\pi/p, \pi/q, \pi/r)$. Тогда сферу, плоскость или плоскость Лобачевского можно представить в виде объединения треугольников $gT (g \in G)$, причем треугольники g_1T и g_2T при $g_1 \neq g_2$ не имеют общих внутренних точек. Последнее свойство обеспечивается требованием поточечного совпадения образов треугольников. В самом деле, если треугольники g_1T и g_2T имеют общую внутреннюю точку, то $g_1(x) = g_2(x)$ для всех $x \in T$, а значит, $g_1 = g_2$.

Назовем треугольник T *фундаментальной областью* группы G. Это определение допускает следующее обобщение. Пусть G — подгруппа группы движений сферы, плоскости или плоскости Лобачевского. Назовем D *фундаментальной областью* группы G, если выполняются следующие условия:

1) D — выпуклый многоугольник (в случае плоскости Лобачевского у него могут быть бесконечно удаленные вершины и стороны);

2) многоугольники gD ($g \in G$) покрывают всю сферу, плоскость или плоскость Лобачевского;

3) многоугольники $g_1 D$ и $g_2 D$ при $g_1 \neq g_2$ не имеют общих внутренних точек.

Отметим, что не у любой подгруппы группы движений есть фундаментальная область. Например, у всей группы движений нет фундаментальной области.

В качестве простого примера найдем фундаментальную область для подгруппы собственных движений в группе, порожденной отражениями относительно сторон треугольника T типа (p, q, r). Нетрудно понять, что если s — симметрия относительно одной из сторон треугольника T, то объединение T с sT представляет собой искомую фундаментальную область. В самом деле, треугольники вида gT можно разбить на пары $\{gT, gsT\}$. Дело в том, что треугольник gsT определяет ту же самую пару, так как $(gs)sT = gT$

Перейдем теперь к более интересному примеру фундаментальной области. Напомним, что в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости собственные движения имеют вид $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc = 1$. Группу матриц размером 2×2 с вещественными элементами и определителем 1 обозначают $SL(2, \mathbb{R})$. Любым двум пропорциональным матрицам (и только им) соответствует одно и то же дробно-линейное преобразование. Поэтому группа собственных движений плоскости Лобачевского изоморфна факторгруппе $SL(2, \mathbb{R})/\pm I = PSL(2, \mathbb{R})$; здесь I — единичная матрица . В $SL(2, \mathbb{R})$ есть важная подгруппа $SL(2, \mathbb{Z})$, состоящая из матриц с целочисленными элементами. Ей соответствует подгруппа $PSL(2, \mathbb{Z})$ в $PSL(2, \mathbb{R})$. Группу $PSL(2, \mathbb{Z})$ называют *модулярной группой.*

Теорема. *Треугольник D с углами $(0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$, изображенный на рис. 7.1, является фундаментальной областью модулярной группы.*

Доказательство. Рассмотрим в группе $G = PSL(2, \mathbb{Z})$ элементы $S(z) = -1/z$ и $T(z) = z + 1$. Они порождают некоторую подгруппу G'. Мы докажем сначала, что D — фундаментальная область группы G', а затем докажем, что $G' = G$, т.е. элементы S и T порождают всю группу G.

Прежде всего проверим, что треугольники $g'D$ ($g' \in G'$) покрывают всю плоскость Лобачевского, т.е. если $\Im(z) > 0$, то $g'z \in D$ для некоторого $g' \in G'$.

Лемма 1. *Если $\Im(z) > 0$, то при $g \in G$ величина $\Im(gz)$ принимает лишь конечное число значений, больших $\Im(z)$.*

Доказательство. Ясно, что

$$\Im(gz) = \Im\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \Im\frac{adz+bc\bar{z}}{|cz+d|^2} = \frac{\Im(z)}{|cz+d|^2}.$$

Поэтому $\Im(gz) \geq \Im(z)$ лишь в том случае, когда $|cz+d| \leq 1$. Последнее неравенство выполняется лишь для конечного множества пар целых чисел (c, d), причем для каждой такой пары величина $\Im(gz)$ определена однозначно. $\square$

Группа G' содержится в G, поэтому для любой точки z в верхней полуплоскости можно выбрать элемент $g' \in G'$, для которого величина $\Im(g'z)$ максимальна. Преобразование $T(z) = z+1$ не изменяет мнимую часть числа z, поэтому для некоторого элемента $w = T^k g'z$, $k \in \mathbb{Z}$, выполняется неравенство $|\Re(w)| \leq 1/2$, а величина $\Im(w)$ по-прежнему максимальна. В частности,

$$\Im(w) \geq \Im\left(-\frac{1}{w}\right) = \frac{\Im(w)}{|w|^2}.$$

Поэтому $|w| \geq 1$, а значит, $w \in D$.

Лемма 2. *Если z — внутренняя точка области D и $gz \in D$ для $g \in G$, то g — тождественное преобразование.*

Доказательство. Пусть $g(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$. Рассмотрим сначала случай $c = 0$. В этом случае $ad = 1$, т.е. $g(z) = z \pm b$. Если $b \neq 0$, то лишь для преобразований $g(z) = z \pm 1$ образ множества D пересекается с множеством D. Но их пересечение принадлежит множеству $|\Re(z)| = 1/2$, которое не содержит внутренних точек множества D.

Предположим теперь, что $c \neq 0$. Тогда

$$g(z) = \frac{a}{c} - \frac{1}{c(cz+d)},$$

поэтому
$$\left|g(z)-\frac{a}{c}\right|\cdot\left|z+\frac{d}{c}\right|=\frac{1}{c^2}. \tag{2}$$
Числа a/c и d/c вещественны, поэтому мнимые части чисел $g(z)-a/c$ и $z+d/c$ равны мнимым частям чисел $g(z)$ и z. А так как мнимая часть любой точки области D не меньше $\sqrt{3}/2$, то модули чисел $g(z)-a/c$ и $z+d/c$ тоже не меньше $\sqrt{3}/2$. Следовательно, $|c|\le 2/\sqrt{3}$, причем c — ненулевое целое число. Таким образом, $c=\pm 1$, поэтому соотношение (2) можно записать в виде
$$|g(z)\mp a|\cdot|z\pm d|=1.$$
Но если $g(z)\in D$ и z — внутренняя точка области D, то для любых целых чисел a и d выполняются неравенства
$$|g(z)\mp a|\ge 1, \qquad |z\pm d|>1.$$
□

Из леммы 2, в частности, следует, что для несовпадающих элементов g_1' и g_2' группы G' множества $g_1'D$ и $g_2'D$ не имеют общих внутренних точек. Таким образом, D — фундаментальная область группы G'.

Теперь можно без труда доказать, что $G=G'$. В самом деле, пусть g — произвольный элемент группы G. Возьмем произвольную внутреннюю точку z области D. Точка gz лежит в верхней полуплоскости, поэтому существует элемент $g'\in G'$, для которого $g'(gz)\in D$. Движение $g'g\in G$ переводит внутреннюю точку z области D в некоторую точку области D. Поэтому согласно лемме 2 преобразование $g'g$ тождественно, т.е. $g=(g')^{-1}\in G'$.

Доказательство теоремы завершено. □

Фундаментальная область группы $PSL(2,\mathbb{Z})$ представляет собой треугольник с углами $(0,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$. Но ее удобнее рассматривать как четырехугольник $ABCD$ с углами $0,\frac{\pi}{3},\pi,\frac{\pi}{3}$ (рис. 7.2). Дело в том, что стороны этого четырехугольника разбиваются на пары; стороны каждой пары переводятся друг в друга некоторыми элементами группы $PSL(2,\mathbb{Z})$.

Задачи

1. а) Доказать, что фундаментальную область группы $PSL(2,\mathbb{Z})$ можно разрезать на два треугольника с углами $(0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3})$.

б) Доказать, что подгруппа собственных движений в группе, порожденной отражениями относительно сторон треугольника с углами $(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$, изоморфна $PSL(2, \mathbb{Z})$.

2. Доказать, что треугольник с углами $(0, 0, 0)$ можно разрезать на 6 треугольников с углами $(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$.

3. Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1, \quad |\Re(z)| \leq 1\}$.

а) Доказать, что движения $z \mapsto z + 2$ и $z \mapsto -1/z$ переводят одну из сторон области D в другую.

б) Доказать, что D — фундаментальная область группы, порожденной движениями $z \mapsto z + 2$ и $z \mapsto -1/z$.

4. Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \left|z + \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{2}, \quad \left|z - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{2}, \quad |\Re z| \leq 1\}$.

а) Доказать, что D — фундаментальная область группы G, порожденной движениями $z \mapsto z + 2$ и $z \mapsto \frac{z}{2z + 1}$.

б) Доказать, что элементам указанной группы G соответствуют в $SL(2, \mathbb{Z})$ в точности те матрицы, для которых

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (mod 2).$$

8. Теория Пуанкаре о фундаментальном многоугольнике

Рассмотренные нами примеры замощенной сферы, плоскости и плоскости Лобачевского треугольниками показывают, что наиболее сложную структуру имеют замощения плоскости Лобачевского. Тем не менее, можно описать все выпуклые многоугольники на плоскости Лобачевского, которые служат фундаментальными областями групп, состоящих из собственных движений. Подчеркнем, что в отличие от замощений треугольниками речь теперь будет идти только о собственных движениях. Но это не мешает одновременно получать результаты о замощениях треугольниками. Дело в том, что если склеить треугольники T и sT, где s — симметрия относительно одной из сторон треугольника T, то в результате получится фундаментальная область D группы, состоящей лишь из собственных движений. А из замощения плоскости Лобачевского образами фигуры D легко получить замощение образами треугольника T.

Пусть M — выпуклый многоугольник на плоскости Лобачевского, причем некоторые его вершины и стороны могут быть бесконечно удаленными. О таких вершинах и сторонах будем говорить, что они лежат на *абсолюте*. Предположим, что M — фундаментальная область некоторой группы G, состоящей лишь из собственных движений. Для фундаментальной области M можно рассмотреть многоугольники вида $gM (g \in G)$, пересечения которых с M непустые; таких многоугольников конечное число. Пересечение выпуклых множеств M и gM не имеет внутренних точек, поэтому оно является либо точкой, либо отрезком. Все отрезки вида $M \cap gM$ назовем *сторонами* фундаментальной области M, а все точки тройных пересечений $M \cap gM \cap hM$ назовем *вершинами* фундаментальной области. Концами каждой стороны фундаментальной области являются вершины фундаментальной области. Отметим, что вершина фундаментальной области M не обязана быть вершиной многоугольника M (рис. 8.1).

К каждой стороне a фундаментальной области M приклеивается некоторый многоугольник $g(M)$, поэтому $a = g(b)$, где b — некоторая сторона фундаментальной области M. Ясно, что к стороне b приклеивается сторона $g^{-1}(a)$ фундаментальной области $g^{-1}(M)$. Поэтому стороны фундаментальной области M разбиваются на пары сторон, переводящихся друг в друга движениями $g \in G$. Соответствующие движения g называют движениями, *спаривающими стороны*.

Случай $a = g(a)$ не исключен. Легко проверить, что собственное движение $g \neq \mathrm{id}$ переводит отрезок в себя лишь в том случае, когда g — симметрия относительно середины отрезка. Поэтому от ситуации, когда $a = g(a)$, можно избавиться, добавив к числу вершин середину отрезка a. Подчеркнем, что вершины такого типа добавляются лишь для того, чтобы стороны в парах были различны. Если эти вершины не добавлять, то никаких других осложнений не возникает.

Каждое движение g, спаривающее стороны, переводит пару вершин A_1, A_2 в другую пару вершин $g(A_1), g(A_2)$. Соединим вершины A_i и $g(A_i)$ ориентированным ребром; движению g^{-1} соответствует то же самое ребро, но с другой ориентацией. Проведем такие ребра для всех спаривающих движений. В результате получим некоторый граф. Каждой вершине соответствуют ровно два спаривающих движения, поэтому из каждой вершины графа выходят ровно два ребра. Таким образом, полученный граф состоит из нескольких циклов. Вершины, входящие в один цикл, назовем *эквивалентными*.

Рассмотрим цикл $A_1 \dots A_n$. Его ребра можно ориентировать так, что $g_i(A_i) = A_{i+1}$. Покажем, что если точки $A_1, \dots, A_n$ не лежат на абсолюте, то преобразование $g = g_n g_{n-1} \dots g_1$ является поворотом с центром A_1 на угол $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$, где α_i — угол при вершине A_i. Ясно, что

$$g(A_1) = g_n g_{n-1} \dots g_2(A_2) = \dots = A_1.$$

Пусть a — та сторона фундаментальной области, которую движение g_1 переводит в другую сторону. Собственное движение

$$f = R_{A_1}^{\alpha_1} g_n \dots R_{A_3}^{\alpha_3} g_2 R_{A_2}^{\alpha_2} g_1$$

переводит в себя точку A_1 и прямую a, поэтому $f = \mathrm{id}$. Легко проверить, что для любого собственного движения h справедливо равенство

$$hR_A^{\alpha} = R_{h(A)}^{\varepsilon\alpha} h, \tag{3}$$

где $\varepsilon = 1$ для собственного движения h и $\varepsilon = -1$ для несобственного движения h. Воспользовавшись этим равенством (для собственных движений), получим

$$f = R_{A_1}^{\alpha_1} g_n \dots R_{A_3}^{\alpha_3} g_2 g_1 R_{A_1}^{\alpha_2} = \dots = g R_{A_1}^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}.$$

Следовательно, $g = R_{A_1}^{-(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)}$

Многоугольники $g_n(M), g_n g_{n-1}(M), \dots, g_n g_{n-1} \dots g_1(M)$ имеют общую вершину A_1, причем их углы при этой вершине равны $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1$ соответственно. Применим к этим многоугольникам степени преобразования $g = g_n g_{n-1} \dots g_1$. Необходимым и достаточным условием того, что в результате получится замощение окрестности точки A, является равенство $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 2\pi/k,\ k \in \mathbb{N}$.

Мы получили некоторые необходимые условия того, что выпуклый многоугольник на плоскости Лобачевского является фундаментальной областью. Оказывается, что эти условия не только необходимы, но и достаточны.

Теорема (Пуанкаре). *Пусть выпуклый гиперболический многоугольник M обладает следующими свойствами:*

(1) стороны многоугольника, не лежащие на абсолюте[2], разбиты на пары $\{a, b\}$, причем для каждой такой пары сторон существует спаривающее их собственное движение g, т.е. $b = g(a) = M \cap g(M)$;

(2) сумма углов при эквивалентных вершинах, не лежащих на абсолюте, кратна 2π.

Тогда M — фундаментальная область группы G, порожденной движениями, спаривающими стороны.

[2]Имеются в виду не те стороны, которые одним или двумя концами выходят на абсолют, а лишь те стороны, которые целиком лежат на абсолюте.

Доказательство. Прежде всего докажем, что если многоугольники h_1M и h_2M $(h_1, h_2 \in G)$ имеют общую внутреннюю точку, то $h_1 = h_2$. Применим к обоим многоугольникам преобразование h_1^{-1}. После этого можно будет считать, что $h_1 = \mathrm{id}$. Преобразование $g = h_2$ представим в виде композиции преобразований, спаривающих стороны: $g = g_k g_{k-1} \dots g_1$. Предположим, что $g \neq \mathrm{id}$. при этом можно выбрать преобразование g с наименьшей длиной разложения k. Пусть A — общая внутренняя точка многоугольников M и $g(M)$. Разложению $g = g_k \dots g_1$ можно сопоставить замкнутую ломаную $A_1 \dots A_k$, где $A_1 = A$, $A_{s+1} = g_s(A_s)$ при $s \geq 1$. Точки A_s и A_{s+1} не могут совпадать, потому что они являются внутренними точками двух выпуклых многоугольников, имеющих общую сторону. Из минимальности длины разложения следует, что ломаная $A_1 \dots A_n$ несамопересекающаяся.

В том случае, когда ломаная $A_1 \dots A_k$ представляют собой обход вокруг одной из вершин многоугольника M, преобразование g по условию является поворотом на угол 2π вокруг этой вершины, поэтому $g = \mathrm{id}$. Предположим теперь, что ломаная получается в результате объединения двух ломаных, причем их общие стороны проходятся в разных направлениях (рис. 8.2). Из равенств $\alpha\beta\gamma = 1$, $\beta_1\alpha_1 = 1$ и $\beta_1 = \beta^{-1}$ следует, что $\alpha\alpha_1\gamma = 1$. Поэтому для замкнутой ломаной, полученной в результате объединения нескольких обходов вокруг вершин многоугольников, тоже выполняется равенство $g = \mathrm{id}$. Ясно также, что любую замкнутую несамопересекающуюся ломаную, соответствующую разложению преобразования g, можно представить требуемым образом, поэтому $g = \mathrm{id}$.

Остается доказать, что образы многоугольника M заполняют всю плоскость Лобачевского. Вершины многоугольников $gM (g \in G)$ образуют счетное множество, поэтому внутри многоугольника M можно выбрать точку A так, что отрезок XA не содержит ни одной из вершин многоугольников gM. Достаточно доказать, что отрезок XA пересекает лишь конечное число многоугольников gM.

Расстояние между двумя сторонами выпуклого многоугольника равно нулю лишь в том случае, когда эти стороны соседние. Поэтому расстояние между любыми двумя точками несоседних сторон многоугольника M больше некоторого фиксированного положительного числа. Следовательно, на отрезке XA расположено лишь конечное число отрезков, соединяющих несоседние стороны многоугольников gM. Будем говорить, что отрезок *стягивает* вершину многоугольника, если его концы расположены на сторонах, выходящих из этой вершины. Предположим, что пара соседних отрезков стягивает неэквивалентные вершины многоугольников g_1M и g_2M (рис. 8.3). Тогда в многоугольнике $g_1M \bigcup g_2M$ отрезок, составленный из двух рассматриваемых отрезков, не может стягивать вершину (в одну и ту же точку попадают лишь эквивалентные вершины), поэтому он соединяет точки двух несоседних сторон. Следовательно, длина полученного отрезка больше некоторого фиксированного положительного числа. Таким образом, исключив из рассмотрения конечное число отрезков, можно считать, что все отрезки стягивают вершины одного и того же класса эквивалентности.

Предположим, что на отрезке XA расположено бесконечно много таких отрезков. В том случае, когда стягиваемая ими вершина не лежит на абсолюте, прямая XA должна спиралеобразно обвиваться вокруг этой вершины (рис. 8.4), чего не может быть.

Рассмотрим теперь случай, когда вершина A_1 стягиваемая бесконечным количеством отрезков, лежит на абсолюте. Вершине A_1 соответствует цикл $A_1 \dots A_n$. Пусть $g_1, \dots, g_n$ — соответствующие этому циклу движения, спаривающие стороны. Тогда преобразование $g = g_n g_{n-1} \dots g_1$ является параболическим собственным движением с неподвижной точкой A_1. Для доказательства этого утверждения нужно вместо равенства (3) применить равенство

$$hP_A = P_{h(A)}h,$$

где P_A и $P_{h(A)}$ — некоторые параболические движения с неподвижными точками A и $h(A)$ соответственно.

Воспользуемся моделью Пуанкаре в верхней полуплоскости. Будем при этом считать, что $A_1 = \infty$. В таком случае преобразование g имеет вид $g(z) = z + h$. Поэтому в окрестности точки A_1 замощение образами многоугольника M состоит из вертикальных полос шириной h, каждая из которых состоит из n полос, соответствующих образам многоугольника M. Ясно, что любая гиперболическая прямая XA может пересекать лишь конечное число полос шириной h (рис. 8.5). Следовательно, отрезок XA пересекает лишь конечное число образов многоугольника M. $\square$

Из доказательства теоремы Пуанкаре видно, что все соотношения между спаривающими движениями следуют из соотношений, возникающих при обходе вокруг вершин многоугольника. При этом соотношения, возникающие при обходе вокруг вершин одного цикла, эквивалентны.

Задачи

1. Доказать, что образы гиперболического треугольника с углами $\pi/p, \pi/q, \pi/r$ при симметриях относительно сторон покрывают всю плоскость Лобачевского.

2. Верно ли, что в гиперболической геометрии композиция поворотов на углы α и β (с разными центрами) является поворотом на угол $\alpha+\beta$?

3. Доказать, что группа $PSL(2,\mathbb{Z})$ задается образующими S и T и соотношениями $S^2=1$, $(ST)^3=1$.

4. Рассмотрим правильный гиперболический восьмиугольник с углом $\pi/4$. Пусть спаривающие движения отождествляют его противоположные стороны. Доказать, что получаемая в результате группа задается образующими a,b,c,d и соотношением $abcda^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}=1$.

5. а) Указать фундаментальную область для группы, заданной образующими a,b,c,d и соотношением $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}=1$.

б) Доказать, что эта группа изоморфна группе из задачи 4.

9. Пространство Лобачевского

Все рассмотренные нами модели плоскости Лобачевского легко обобщаются на случай n-мерного пространства, причем доказательства изометричности этих моделей проводятся без существенных изменений.

Для модели Клейна и модели Пуанкаре в n-мерном шаре $x_1^2+\dots+x_n^2<1$ расстояние между точками A и B можно определить как расстояние между точками A и B в соответствующей модели геометрии Лобачевского для сечения шара плоскостью, проходящей через центр шара и точки A и B.

Для модели Пуанкаре в полупространстве

$$H^n=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n|x_n>0\}$$

расстояние между точками A и B определяется как расстояние между ними в модели Пуанкаре в полуплоскости, проходящей через точки A и B и перпендикулярной границе полупространства H^n.

Для модели на полости псевдосферы $[x,x]=-c^2$, где $[x,y]=x_1y_1+\dots+x_ny_n-x_{n+1}y_{n+1}$ расстояние d между точками x и y задается формулой

$$\operatorname{ch}^2\left(\frac{d}{c}\right)=\frac{[x,y]^2}{[x,x][y,y]}.$$

В дальнейшем мы будем работать только с моделями Пуанкаре. В этих моделях гиперболическими подпространствами являются части сфер, ортогональных абсолюту (евклидовы подпространства мы при этом рассматриваем как сферы бесконечного радиуса). Подпространства размерности $n-1$ в пространстве размерности n будем называть *гиперплоскостями.* Чтобы определить симметрию относительно гиперплоскости в пространстве Лобачевского, достаточно определить симметрию относительно сферы S^{n-1} в $\mathbb{R}^n$. Назовем точки A и B *симметричными* относительно сферы S^{n-1} в $\mathbb{R}^n$, если любая сфера размерности $n-1$, проходящая через точки A и B, ортогональна сфере S^{n-1}. Симметрия относительно сферы совпадает с инверсией относительно этой сферы. Инверсия сохраняет двойное отношение, поэтому симметрии относительно гиперплоскостей являются движениями пространства Лобачевского.

Теорема 9.1. *Любое движение n-мерного пространства Лобачевского можно представить в виде композиции не более $n+1$ симметрии относительно гиперплоскостей.*

Доказательство. Аналогичную теорему мы уже доказывали для плоскости Лобачевского. Поэтому остановимся лишь на той части доказательства, которая не переносится автоматически. А именно, покажем, что если движение имеет $n+1$ неподвижную точку, причем эти точки не лежат в одной гиперплоскости, то движение тождественно. Пусть $A_1, \ldots, A_{n+1}$ — данные неподвижные точки. Ясно, что точки $A_1, \ldots, A_m$ не могут лежать в одном $(m-2)$-мерном подпространстве. Для любых двух несовпадающих неподвижных точек X и Y строгое неравенство треугольника влечет, что все точки прямой XY неподвижны. В частности, все точки прямой A_1A_2 неподвижны. Следовательно, если X — произвольная точка прямой A_1A_2, то все точки прямой A_3X неподвижны. Это означает, что все точки плоскости $A_1A_2A_3$ неподвижны. Аналогично получаем, что все точки подпространства $A_1A_2A_3A_4$ неподвижны и т.д. $\square$

Теорема 9.2. *Движение пространства Лобачевского однозначно определяется своим ограничением на абсолют*

Доказательство. Воспользуемся моделью Пуанкаре в полупространстве. Рассмотрим множество всех гиперплоскостей, проходящих через точку X. Среди их ограничений на абсолют можно выделить сферу минимального радиуса (центр этой сферы совпадает с ортогональной проекцией точки X на абсолют). Ясно также, что по выделенной сфере точка X однозначно восстанавливается. Движение g переводит рассматриваемое семейство гиперплоскостей в семейство гиперплоскостей, проходящих через точку $g(x)$. В соответствующем семействе сфер на абсолюте снова можно выделить сферу минимального радиуса, а по ней можно восстановить точку $g(x)$. Это означает, что точку $g(x)$ можно определить, зная лишь преобразование семейства сфер на абсолюте. Для этого, разумеется, достаточно знать лишь ограничение преобразования g на абсолют. □

Теорема 9.3. *Группа собственных движений 3-мерного пространства Лобачевского изоморфна* $PSL(2, \mathbb{C})$.

Доказательство. Согласно теоремам 9.1 и 9.2 группа движений трехмерного пространства Лобачевского изоморфна группе преобразований плоскости, порожденной симметриями относительно прямых и окружностей. Будем рассматривать плоскость как комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Симметрии относительно вещественной оси и единичной окружности переводят z в $\bar{z}$ и $-1/\bar{z}$ соответственно. Композиции симметрий относительно двух параллельных прямых, двух прямых, проходящих через начало координат, и двух окружностей с центром в начале координат переводят z в $z+a$, $e^{i\alpha}z$ и $kz \quad (k>0)$ соответственно. Следовательно, любое отображение вида

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, \quad \text{где} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}),$$

можно представить в виде композиции симметрий. Ясно также, что любая композиция симметрий относительно прямых и окружностей имеет такой вид.

Собственные движения соответствуют преобразованиям

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

А так как пропорциональным матрицам соответствует одно и то же преобразование, то группа собственных движений 3-мерного пространства Лобачевского изоморфна $SL(2, \mathbb{C})/\pm I$. □

Для трехмерного пространства Лобачевского по аналогии с плоскостью Лобачевского можно определить эллиптические, параболические и гиперболические пучки плоскостей. Это позволит доказать следующие утверждения:

1) группа $PSL(2, \mathbb{C})$ содержит в качестве подгрупп группы собственных движений сферы, плоскости и плоскости Лобачевского;

2) в трехмерное пространство Лобачевского можно изометрически вложить сферу, плоскость и плоскость Лобачевского.

Назовем *эллиптическим* пучком (в трехмерном пространстве Лобачевского) семейство плоскостей, проходящих через фиксированную точку; назовем *параболическим* пучком семейство плоскостей, проходящих через фиксированную точку на абсолюте; назовем *гиперболическим* пучком семейство плоскостей, ортогональных фиксированной плоскости.

Теорема 9.4. *Множество всех композиций симметрий относительно пар плоскостей одного пучка является подгруппой в $PSL(2,\mathbb{C})$. Для эллиптического, параболического и гиперболического пучка эта подгруппа изоморфна группе собственных движений сферы, плоскости и плоскости Лобачевского соответственно.*

Доказательство. Для эллиптического пучка рассмотрим модель Пуанкаре в шаре, причем будем считать, что все плоскости пучка проходят через центр шара. Симметрии относительно таких плоскостей порождают группу движений сферы, концентричной с абсолютом.

Для параболического пучка рассмотрим модель Пуанкаре в полупространстве, причем будем считать, что все плоскости пучка являются евклидовыми полуплоскостями, ортогональными абсолюту (все такие плоскости проходят через точку ∞ на абсолюте). Симметрии относительно таких плоскостей переводят в себя каждую евклидову плоскость, параллельную абсолюту. Ограничения этих симметрий на указанные плоскости порождают группу евклидовых движений этих плоскостей.

Для гиперболического пучка рассмотрим модель Пуанкаре в полупространстве, причем будем считать, что все плоскости ортогональны некоторой плоскости Π, проходящей через точку ∞. Пусть l — прямая, по которой плоскость Π пересекает абсолют. Симметрии относительно плоскостей данного пучка являются инверсиями относительно сфер, центры которых лежат на прямой l; эти движения переводят в себя любую евклидову полуплоскость Π', ограниченную прямой l. Ограничения этих преобразований на Π' являются симметриями относительно окружностей, ортогональных прямой l. Эти преобразования порождают группу движений модели Пуанкаре в верхней полуплоскости. $\square$

На поверхности F в пространстве Лобачевского можно ввести *индуцированную метрику*. Для этого нужно определить элемент длины на поверхности F (расстояние между бесконечно близкими точками) как расстояние между соответствующими точками пространства Лобачевского.

Рассмотрим поверхность, состоящую из образов фиксированной точки под действием семейства собственных движений, соответствующих пучку плоскостей. Такую поверхность в случае эллиптического, параболического и гиперболического пучка называют *сферой*, *орисферой* и *гиперсферой* соответственно. В рассмотренных нами ситуациях сферами будут евклидовы сферы с центром в центре модели, орисферами будут евклидовы плоскости, параллельные абсолюту, а гиперсферами будут евклидовы полуплоскости, содержащие прямую l.

Для модели Пуанкаре в полупространстве $H^3 = \{(x,y,z)|z>0\}$ элемент длины имеет вид ds/z, где $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Поэтому на орисфере $z = a$ квадрат элемента длины имеет вид $a^{-2}(dx^2 + dy^2)$. Таким образом, в координатах (x, y) расстояние между точками орисферы пропорционально евклидову расстоянию.

На гиперсфере $y = kz$ квадрат элемента длины имеет вид

$$\frac{dx^2 + (1+k^2)dz^2}{z^2} = (1+k^2)\frac{du^2 + dv^2}{v^2},$$

где $u = x/\sqrt{1+k^2}$, $v = z$. Таким образом, в координатах (u, v) расстояние между точками гиперсферы пропорционально расстоянию на плоскости Лобачевского.

Для модели Пуанкаре в единичном шаре элемент длины имеет вид $\dfrac{2ds}{1-R^2}$, где ds — евклидов элемент длины, R — расстояние до центра шара. Поэтому расстояние между точками гиперболической сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в $\dfrac{2}{1-R^2}$ раз больше расстояния между точками евклидовой сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Таким образом, рассматриваемая гиперболическая сфера изометрична евклидовой сфере радиуса $\dfrac{2R}{1-R^2}$.

⋆ ⋆ ⋆

Движение трехмерного пространства Лобачевского можно представить с помощью кватернионов. Напомним, что *кватернионами* называют алгебру над $\mathbb{R}$ с образующими $1, i, j, k$ и соотношениями $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$; эта алгебра ассоциативна. Положим

$$H^3 = \{z + tj|\ z \in \mathbb{C},\quad t > 0\}.$$

Действие матрицы $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$ на точки абсолюта $\mathbb{C}$ задается формулой $\gamma z = \dfrac{az+b}{cz+d}$. Требуется продолжить это действие на кватернионы вида $q = z + tj$, $t > 0$. Это можно сделать двумя эквивалентными способами:

$$\gamma q = (aq+b)(cq+d)^{-1} = (qc+d)^{-1}(qa+b).$$

Прежде всего проверим, что обе формулы действительно эквивалентны, т.е.

$$(qc+d)(aq+b) = (qa+b)(cq+d).$$

Числа a, b, c и d попарно перестановочны, поэтому требуемое равенство эквивалентно равенству $(ad-bc)q = q(ad-bc)$. Последнее равенство очевидно, так как $ad-bc=1$.

Проверим теперь, что $\gamma q = z' + t'j$, где $t' > 0$. Учитывая, что $j(\overline{cz+d}) = (cz+d)j$ и $ad-bc=1$, получаем $(aq+b)(cq+d) = (az+b)(\overline{cz+d}) + act^2 + tj$, поэтому

$$\gamma q = \frac{(aq+b)(\overline{cq+d})}{|cq+d|^2} = \frac{(az+b)(\overline{cz+d}) + act^2 + tj}{|cq+d|^2}.$$

Остается проверить, что преобразование γ является движением пространства Лобачевского. Для этого достаточно проверить, что γ сохраняет двойное отношение. Ясно, что

$$\begin{gathered}\gamma q - \gamma q' = (aq+b)(cq+d)^{-1} - (q'c+d)^{-1}(q'a+b) = \\ (q'c+d)^{-1}[(q'c+d)(aq+b) - (q'a+b)(cq+d)](cq+d)^{-1} = \\ (q'c+d)^{-1}(q-q')(cq+d)^{-1}.\end{gathered}$$

Кроме того, $q'c+d = (z'c+d) + t\bar{c}j$ и $cq'+d = (cz'+d) + tcj$. Поэтому $|q'c+d| = |cq'+d|$, а значит,

$$|\gamma q - \gamma q'| = \frac{|q-q'|}{|cq+d||cq'+d|}.$$

С помощью этой формулы легко убедиться, что преобразование γ сохраняет двойное отношение $\dfrac{CA}{CB} : \dfrac{DA}{DB}$.

Задачи

1. Доказать, что если движение пространства Лобачевского оставляет неподвижными все точки некоторой гиперплоскости, то это движение либо тождественно, либо является симметрией относительно данной гиперплоскости.

2. Доказать, что ограничение движения трехмерного пространства Лобачевского на абсолют имеет одну или две неподвижные точки.

3. Пусть A, B, C, D — попарно различные точки абсолюта для трехмерного пространства Лобачевского. Доказать, что существует движение, переставляющее как точки A и B, так и точки C и D.

4. Рассмотрим тетраэдр с вершинами на абсолюте.

а) Доказать, что его противоположные двугранные углы равны.

б) Доказать, что сумма его двугранных углов при любой вершине равна π.

5. Правильный многогранник с вершинами на абсолюте соответствует в модели Клейна некоторому гиперболическому многограннику. Найти величину двугранного угла этого многогранника для каждого типа правильного многогранника: а) тетраэдра; б) куба; в) октаэдра; г) икосаэдра; д) додекаэдра.

6. Возьмем в n-мерном гиперболическом пространстве точки $z_1, \ldots, z_{n+2}$ и рассмотрим матрицу $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = \mathrm{ch}(d_{ij})$, где d_{ij} — расстояние между точками z_i и z_j. Доказать, что $\det A = 0$.

7. Пусть R и r — радиусы двух $(n-1)$-мерных сфер в $\mathbb{R}^n$, d — расстояние между их центрами. Доказать, что величина

$$\left| \frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr} \right|$$

сохраняется при инверсиях.

Дополнение[3]. Что такое ориентация?

В лекциях 2 и 5 мы познакомились с двумя типами движений сферы (плоскости Лобачевского): собственными и несобственными. Собственные движения мы определяли как те, которые сохраняют ориентацию, т.е. свели к другому понятию. Известно, что существует ровно две ориентации плоскости, сферы и плоскости Лобачевского, а также пространств любой размерности каждого из указанных типов. Однако же проективная плоскость имеет всего одну ориентацию, т.е. все ее движения являются собственными. А как обстоит дело с проективной прямой или трехмерным проективным пространством? А можно ли представить себе геометрию, имеющую более двух ориентаций? В каком-то смысле переформулировкой последнего вопроса является знаменитый классический вопрос, почему зеркало меняет местами право и лево и не меняет верх и низ. Чтобы разобраться с этими вопросами необходимо строго определить понятие ориентации (или собственного и несобственного движения).

Мы постараемся здесь изложить несколько подходов к определению этих понятий. Мы как бы посмотрим на них с разных сторон. Каждый из этих подходов мы не будем доводить до конца, ограничившись лишь намеком, и оставив по пути серию задач для самостоятельного решения.

[3]Написано В.О.Бугаенко

Геометрический подход

Этот подход мы проиллюстрируем на примере обычной евклидовой плоскости. Его прелесть состоит в том, что он совершенно элементарен, т.е. не требует никаких знаний, выходящих за рамки школьной программы. Однако для его доведения до конца потребуется определенная кропотливая работа. Желательно при этом иметь любовь к геометрии, которая, к сожалению, сейчас встречается редко. К тому же, эта конструкция требует отдельного рассмотрения для каждого вида плоскости; если мы захотим рассмотреть сферу или плоскость Лобачевского, нам нужно будет находить свою конструкцию в каждом из этих случаев.

Известно, что если на плоскости даны две пары точек A, B и A', B' такие, что длины отрезков AB и $A'B'$ равны, то существует ровно два движения, переводящих A в B, а A' в B'. Фактически либо это, либо равносильное ему утверждение присутствует в любой аксиоматике геометрии. Одно из таких равносильных утверждений состоит в том, что существует ровно два треугольника, равных данному, две вершины которых фиксированы. Как следствие этого утверждения мы имеем следующее предложение.

Предложение 1. *Любое движение плоскости можно представить в виде композиции параллельного переноса, поворота и, быть может, осевой симметрии.*

Доказательство. Пусть мы имеем некоторое движение φ плоскости. Выберем на плоскости две произвольные точки A и B и рассмотрим их образы A_φ и B_φ. Нетрудно построить два движения указанного вида, переводящие A в A_φ, а B в B_φ. Одно из них есть композиция параллельного переноса на вектор $\overrightarrow{AA_\varphi}$ и некоторого (однозначно определенного) поворота вокруг точки A_φ. Другим таким движением будет композиция первого и осевой симметрии относительно прямой $A_\varphi B_\varphi$.

Назовем теперь движение плоскости *собственным*, если его можно представить в виде композиции параллельного переноса и поворота (без осевой симметрии!) и *несобственным* в противном случае. Как видите, удалось определить понятия собственного и несобственного движений без использования понятия ориентации! Правда, теперь мы должны будем доказывать, что композиция двух собственных (двух несобственных) движений есть собственное движение, а композиция собственного и несобственного (несобственного и собственного) движений есть несобственное движение. Иными словами, что операция композиции действует на классах собственных и несобственных движений как умножение на классах вычетов по модулю 2 (классах четных и нечетных чисел). Это следует, например, из следующих двух задач, оставляемых для самостоятельного решения.

Задача 1. Осевая симметрия — несобственное движение.

Задача 2. Композиция двух осевых симметрий — движение собственное.

Задача 3. Движение, обратное к собственному — собственное.

Решить задачи 1 и 3 существенно помогает теорема Шаля, дающая более простое описание собственных движений плоскости, чем утверждение 1.

Теорема (Шаля). *Любое собственное движение плоскости есть параллельный перенос или поворот.*

Иными словами, композиция параллельного переноса и поворота на ненулевой угол есть поворот (с другим центром, но на тот же угол).

Указание. Часто бывает полезно рассмотреть множество неподвижных точек движения. Так для доказательства теоремы Шаля можно доказать сперва, что композиция параллельного переноса и поворота на ненулевой угол имеет неподвижную точку, а затем показать, что рассматриваемое движение — поворот вокруг этой точки. Для доказательства задачи 1 исследуйте, каким может быть множество неподвижных точек собственного движения.

Замечание. Предложение 1 равносильно теореме о том, что любое движение плоскости (равно как и сферы (теорема 2.1) и плоскости Лобачевского) представимо в виде композиции не более чем трех симметрий. Возможно, кому-то покажется более простым использовать эту теорему вместо предложения 1.

Аналитический подход

Введем следующее определение. Движение φ плоскости (сферы, плоскости Лобачевского, пространства и т.п.) назовем собственным, если его можно осуществить непрерывным движением, не выводящим за пределы плоскости (сферы, плоскости Лобачевского, пространства и т.п.). Более строго, если существует серия движений φ_x для всех $x \in [0,1]$ такая, что $\varphi_0 = \mathrm{id}$ (тождественное движение), $\varphi_1 = \varphi$ и для любой точки A отображение $f(x) : x \mapsto \varphi_x(A)$ есть непрерывная по x функция.

Задачи 4–6 являются простыми упражнениями по математическому анализу.

Задача 4. Параллельный перенос и поворот — собственные движения.

Задача 5. Движение, обратное к собственному — собственное.

Задача 6. Композиция двух собственных движений — собственное движение.

А следующие две задачи, необходимые для обоснования приведенного определения, вряд ли удастся решить без привлечения дополнительных алгебраических соображений.

Задача 7. Осевая симметрия — несобственное движение.

Задача 8. Любое несобственное движение представляется в виде композиции собственного движения и осевой симметрии.

Алгебраический подход

Рассмотрим в плоскости множество всевозможных *ортонормированных базисов*, т.е. пар векторов $\{x, y\}$ с условиями $(x, x) = (y, y) = 1$, (x, y). (Здесь $(\cdot, \cdot)$ означает скалярное произведение.) Все такие базисы делятся на два класса: те, у которых вектор x переходит в вектор y при повороте на угол $\pi/2$ против часовой стрелки или по часовой стрелке соответственно. Выбор одного из этих классов и означает задание ориентации пространства. Чтобы дать строгое определение зафиксируем один ортонормированный базис $\{x^*, y^*\}$. Любой другой базис может быть выражен в виде линейной комбинации

$$\begin{cases} x = a_1 x^* + b_1 y^* \\ y = a_2 x^* + b_2 y^* \end{cases}$$

Матрица $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ называется *матрицей перехода* от базиса (x^*, y^*) к базису (x, y).

Задача 9. Найдите условия, которым должна удовлетворять матрица перехода от одного *ортонормированного* базиса к другому. Докажите, что определитель такой матрицы равен ± 1. Докажите, что все ортонормированные базисы делятся на два класса такие, что матрица перехода между базисами одного класса имеет определитель 1, а между базисами разных классов имеет определитель -1.

Выбор одного из упомянутых классов и означает задание ориентации на плоскости. Движение плоскости либо переводит любой базис в базис того же класса (такое движение называется *собственным*), либо переводит любой базис в базис другого класса (такое движение называется *несобственным*). Ориентацию в пространстве можно задать аналогично. Классы ортонормированных базисов (из трех векторов!) в пространстве также делятся на два класса (вспомните известные из физики правила правой и левой руки).

Любое движение сферы можно интерпретировать как движение пространства, сохраняющее фиксированную неподвижную точку (центр сферы). Собственные и несобственные движения сферы определяются тем, являются ли таковыми соответствующие движения пространства. Таким образом, ориентация сферы определяется ориентацией объемлющего пространства.

Для определения ориентации плоскости Лобачевского следует рассмотреть два класса *псевдоортогональных* базисов в пространстве (т.е. троек векторов $\{(x, y, z)\}$ таких, что $(x, y) = (x, z) = (y, z) = 0$, $(x, x) = (y, y) = 1$, $(z, z) = -1$, где $(\cdot, \cdot)$ — *псевдоскалярное произведение*, задаваемое формулой $(u, v) = u_x v_x + u_y v_y - u_z v_z$. Обоснование такого подхода можно получить, воспользовавшись моделью плоскости Лобачевского в $\mathbb{C}P^2$, описанной в конце лекции 3.

Литература к курсу "Геометрия Лобачевского"

- Адамар Ж. Неевклидова геометрия в теории автоморфных функций, — М. 1952
- Альфонс Л. Преобразование Мёбиуса в многомерном пространстве, М.: Мир, 1986
- Бердон А. Геометрия дискретных групп, — М.: Наука, 1986
- Берже М. Геометрия, т.2, — М.: Мир, 1984
- Буземан Г., Келли П. Проективная геометрия и проективные метрики, — М.: Изд-во иностранной литературы, 1957
- Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия, — М.: Наука, 1981
- Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, — М.–Л.: ГИТТЛ, 1941
- Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения, — М.: Наука, 1986
- Клейн Ф. Неевклидова геометрия, — М.–Л.: ОНТИ, 1936

- Клеменс Г. Мозаика теории комплексных кривых, — М.: Мир, 1984
- Лобачевский Н.И. Избранные труды по геометрии, — М.: Изд-во АН СССР, 1956
- Норден А.П. Элементарное введение в геометрию Лобачевского, — М.: ГИТТЛ, 1953
- Скотт П. Геометрии на трехмерных многообразиях, — М.: Мир, 1986
- Смогоржевский А.С. О геометрии Лобачевского, — М.: ГИТТЛ, 1957
- Тихомиров В.М. Лекции по геометрии, — М.: МК НМУ, 1993
- Энциклопедия элементарной математики, т.5, — М.: Наука, 1966