Экзамен по курсу “Геометрия Лобачевского”.
МК НМУ. 1 курс. 12 февраля 1995 г.

1) Доказать, что любое нетождественное дробно-линейное преобразование с неподвижными точками a и b имеет вид
$$z \mapsto \frac{\lambda z - ab}{z + \lambda - a - b}$$

2) Записать в виде дробно-линейного преобразования симметрию относительно гиперболической прямой $(x-a)^2 + y^2 = R^2$ в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости.

3) Сколько инвариантных прямых может иметь соответственно эллиптическое, параболическое и гиперболическое движение плоскости Лобачевского? (Прямая l инвариантна относительно преобразования φ, если $\varphi(l) = l$.)

4) Дан правильный гиперболический четырехугольник $ABCD$. Прямая l симметрична прямой AC относительно прямой AB. Доказать, что прямые l и BD расходящиеся.

5) На плоскости Лобачевского можно естественным образом определить гомотетию с центром O и коэффициентом $k \neq 0$. Верно ли, что это преобразование увеличивает расстояние между любыми двумя точками в $|k|$ раз?

6) Вершины A, B и C треугольника Δ лежат на абсолюте. Треугольник Δ' получен из Δ последовательными отражениями относительно прямых AB, BC и AC. Есть ли общие точки (внутри или на границе) у треугольников Δ и Δ'?

7) а) Рассмотрим в пространстве Лобачевского трехгранный угол T с вершиной в точке ∞ в модели Пуанкаре в полупространстве. Евклидова площадь сечения T орисферой $z = a$ равна S. Вычислить объем части T, лежащей в области $z \geq a$, если известны S и a (Элемент объема равен $dx\,dy\,dz/z^3$).

   б) Доказать, что объем тетраэдра с вершинами на абсолюте конечен.