Лекции по геометрии пространств отображений

Ю.М.Бурман

Прочитаны студентам Математического Колледжа НМУ
в осеннем семестре 1996 г.

1 Группа классов отображений двумерного тора

Обозначим $\mathcal{D}(\mathbb{T}^2)$ группу собственных диффеоморфизмов тора, т.е., его взаимно однозначных дифференцируемых отображений на себя, сохраняющих ориентацию. Символом $\mathcal{D}_0(\mathbb{T}^2)$ обозначим подгруппу $\mathcal{D}(\mathbb{T}^2)$, состоящую из диффеоморфизмов, гомотопных единичному, т.е., таких, что существует непрерывное семейство диффеоморфизмов P_t, где $P_0 = P$ — заданный диффеоморфизм из $\mathcal{D}_0(\mathbb{T}^2)$, а $P_1 = \mathrm{Id}$. Подгруппа $\mathcal{D}_0(\mathbb{T}^2)$ нормальна, и факторгруппа $\mathrm{Map}(\mathbb{T}^2) = \mathcal{D}(\mathbb{T}^2)/\mathcal{D}_0(\mathbb{T}^2)$ называется *группой классов отображений.* Попросту говоря, $\mathrm{Map}(\mathbb{T}^2)$ это группа сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов тора, рассматриваемых (и умножаемых) с точностью до гомотопии.

Группу классов отображений можно, конечно, определить не только у тора, а у любого многообразия, в том числе и с краем. Например, имеет место

Предложение 1 *Группа классов отображений n-мерного шара тривиальна.*

Для доказательства лучше всего считать, что мы имеем дело не с шаром, а с кубом, и применить индукцию по размерности — проделайте ее.

Нарисуем теперь на торе замкнутую несамопересекающуюся кривую α (мы будем называть такие кривые “окружностями”). Легко усмотреть, что окружности на торе бывают двух типов: одни — *разрезающие* — режут тор на диск и “ручку” (тор с дыркой), а другие — *неразрезающие* — не режут тор вовсе, а превращают его в цилиндр, т.е. сферу с двумя дырками. Две неразрезающие окружности мы будем называть *соседними*, если они пересекаются ровно в одной точке, и причем трансверсально (т.е., касательные прямые в точке пересечения не совпадают). Например, параллель и меридиан тора — соседние неразрезающие окружности.

Если разрезать тор по паре соседних неразрезающих окружностей α и β (например, по параллели и меридиану), то получится квадрат, т.е., двумерный диск. Поэтому из утверждения 1 немедленно следует

Предложение 2 *Подгруппа $\mathrm{Map}(\mathbb{T}^2)$, состоящая из отображений, сохраняющих α и β, изоморфна $\mathbb{Z}_2$.*

$\mathbb{Z}_2$ получается потому, что нужно учитывать *ориентацию* α и β. Поскольку элементы $\mathrm{Map}(\mathbb{T}^2)$ сохраняют ориентацию *тора*, то ориентации α и β либо обе меняются, либо обе сохраняются. Таким образом, элемент $\varphi \in \mathrm{Map}(\mathbb{T}^2)$ полностью определяется тем, куда он переводит α и β, плюс своим “знаком”. Тем самым нам нужно изучить геометрию пар соседних неразрезающих окружностей на торе с точностью до гомотопии.

Мы можем представить себе эту геометрию в виде (бесконечного) графа X, вершинами которого служат классы гомотопии неразрезающих окружностей (ориентации не учитываются), а ребро между двумя вершинами проводится в том случае, если эти классы соседние, т.е., содержат представителей, пересекающихся ровно в одной точке, и притом трансверсально. Основной факт состоит в том, что

Теорема 1 *Граф X связен.*

Для доказательства этой теоремы введем понятие функции Морса. Гладкая функция на многообразии $f : M \to \mathbb{R}$ называется *функцией Морса*, если все ее критические точки невырождены и лежат на разных уровнях. Первое означает, что если $x \in M$ — критическая точка, то матрица вторых производных $G(x) = \partial^2 f(x)/\partial x_i \partial x_j$ невырождена, а второе — что если есть две критические точки $x, y \in M$, то $f(x) \neq f(y)$. Для того, чтобы выписать матрицу $G(x)$, в окрестности точки x нужно ввести систему координат $x_1, \ldots, x_n$, но ясно, что если $G(x)$ невырождена в какой-нибудь одной системе координат, то она невырождена и в любой другой. У критической точки функции Морса есть целочисленная характеристика — *индекс*. Индексом критической точки x называется число отрицательных собственных значений матрицы $G(x)$ (это число, опять-таки, не зависит от выбора координат). Если многообразие M двумерно, то бывают точки индекса 0 — это точки локального минимума функции, индекса 2 — точки локального максимума, и индекса 1 — седла.

Пусть теперь $M = \mathbb{T}^2$. Рассмотрим такое отношение эквивалентности: точки $x, y \in \mathbb{T}^2$ эквивалентны, если $f(x) = f(y) (\stackrel{\text{def}}{=} a)$, и точки x и y принадлежат одной и той же связной компоненте множества $M_a = \{z \in \mathbb{T}^2 \mid f(z) = a\}$. Пусть теперь Y_f — факторпространство тора по введенному отношению эквивалентности. Нетрудно усмотреть (детали доказательства восстановите сами), что Y_f — одномерный клеточный комплекс, т.е., попросту говоря, граф, причем его вершины соответствуют критическим точкам f. Минимуму или максимуму соответствует висячая вершина, а седлу — вершина валентности 3. Кроме того, структура графа Y_f не произвольна — он связный и имеет ровно один цикл (при выбрасывании из него одного ребра из этого цикла граф становится деревом). Доказательство последнего факта — хорошее упражнение.

Возьмем теперь точку α на одном из ребер графа Y_f, входящем в цикл. Точка α соответствует связной компоненте множества уровня функции f, т.е., некоторой окружности на торе. Из того, что точка входит в цикл, следует, что эта окружность — неразрезающая. Нетрудно видеть, кроме того, что различным выборам ребер одного и того же графа соответствуют гомотопные окружности. Поэтому каждой функции Морса $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ соответствует класс гомотопии неразрезающих окружностей, т.е., вершина графа X. Более того, ясно, что всякую неразрезающую окружность α можно получить таким образом – для этого достаточно построить функцию Морса f, имеющую α своей линией уровня. Из того, что окружность α — неразрезающая, будет следовать, что соответствующая точка на ребре графа Y_f входит в цикл.

Пусть теперь α_0 и α_1 — две неразрезающие окружности. Попробуем преобразовать функцию f_0 в функцию f_1. Множество всех функций Морса на торе несвязно, т.е., вообще говоря, нельзя прогомотопировать f_0 в f_1 так, чтобы все f_t были функциями Морса — препятствием может служить хотя бы общее число критических точек. Однако имеет место следующее

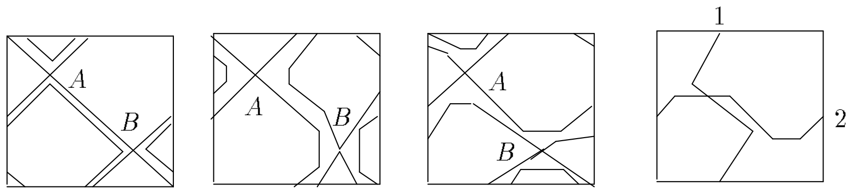
Предложение 3 *Для любых двух функций Морса f_0 и f_1 существует соединяющая их гомотопия f_t такая, что для всех t, кроме конечного числа их, f_t — функция Морса. При этих исключительных значениях параметра t происходит одна из двух "катастроф": либо две критические точки, индексы которых отличаются на единицу, сливаются и пропадают (или наоборот — появляются), либо две критические точки попадают на один и тот же уровень.*

Доказывать это утверждение мы не будем — такого рода утверждениям будет посвящена одна из следующих лекций.

Очевидно, что пока функция f_t остается функцией Морса, граф Y_{f_t} не меняется. Это соответствует тому, что неразрезающая окружность только гомотопируется. Перестройки могут происходить только если значение t — "катастрофическое". Согласно утверждению 3, нам нужно перебрать несколько случаев.

Случай рождения–уничтожения неинтересен. Он соответствует появлению или пропаданию у графа Y_f висячего ребра. Поскольку такое ребро в цикл входить не может, то окружность тоже не перестраивается. Что касается ситуаций, когда две критических точки попадают на один уровень, то легко убедиться, что единственный интересный случай, это когда обе этих точки — седла. Чтобы с ними разобраться, посмотрим, что происходит, когда уровень функции Морса проходит через седло. При этом число связных компонент множества уровня меняется на единицу (таким образом, седло имеет "направление" — вверх или вниз, в зависимости от того, какой уровень содержит больше компонент — надкритический или подкритический). На критическом уровне есть одна линия с самопересечением, которая распадается на две, гомотопные ее "половинкам" (получающимся, если эту критическую линию разрезать в критической точке).

Если два седла находятся на одном уровне, то возможно несколько случаев (на самом деле 6), в зависимости от того, в какую сторону "направлены" эти седла и какие именно компоненты линий уровня сливаются и делятся — одинаковые или нет. Можно проверить перебором, что все эти случаи, кроме одного, тоже неинтересны — никаких катастроф не происходит. Единственный интересный случай изображен схематически на рисунке 1. На рисунке а) показаны критический и подкритический уровни (надкритический уровень — симметрично) функции f_t при катастрофическом значении параметра $t = t_*$. Видно, что под- и надкритический уровни связны, а на критическом уровне лежат два седла. При $t < t_*$



a) $t = t_*$ b) $t < t_*$ c) $t > t_*$ d)

Рис. 1: Единственная перестройка

критический уровень, соответствующий седлу A, лежит ниже уровня, соответствующего седлу B (критические уровни показаны на рисунке b)), а при $t > t_*$ — наоборот (критические уровни показаны на рисунке c)). Неразрезающие окружности при всех t соответствуют уровням, лежащим *между* двумя критическими. Эти уровни показаны на рисунке d) (показана только одна из двух линий уровня; линия 1 соответствует $t < t_*$, а линия $1'$ — $t > t_*$). Видно, что нарисованные окружности — соседние. Таким образом, при значении параметра $t = t_*$ перестройка заключается в том, что неразрезающая окружность заменяется на соседнюю.

Тем самым мы перевели одну неразрезающую окружность в другую с помощью конечного числа элементарных операций, т.е., доказали связность графа X. Теорема 1 доказана.

Зафиксируем теперь пару соседних неразрезающих окружностей α и β (параллель и меридиан тора), т.е., ребро графа X. Обозначим γ окружность, соседнюю и с α, и с β (на стандартной развертке тора γ изображается диагональю квадрата). Рассмотрим два элемента $\mathrm{Map}(\mathbb{T}^2)$. Элемент σ переводит α в β, а β в α (на стандартной развертке тора он соответствует повороту квадрата на $\pi/2$), а элемент ϱ оставляет β на месте, а α переводит в γ (на развертке он изображается как переклейка вдоль диагонали плюс сдвиг). Элемент σ^2 сохраняет α и β, но, как нетрудно проверить, меняет их ориентацию.

Лемма 1 *Подгруппа* $\mathrm{Map}(\mathbb{T}^2)$*, состоящая из преобразований, оставляющих* β *на месте (стабилизатор* Stab_β *вершины* β *в графе* X*) порождается коммутирующими элементами* ϱ *и* σ^2*.*

Доказательство. Элемент σ^2, как нетрудно убедиться, коммутирует с ϱ:

$$\varrho\sigma^2 = \sigma^2\varrho. \tag{1}$$

Разрежем теперь тор по окружности β — получится цилиндр. Если теперь $\varphi \in \mathrm{Stab}_\beta$, то $\varphi(\alpha)$ — окружность, соседняя с β (элементы $\mathrm{Map}(\mathbb{T}^2)$, действуя на графе X, сохраняют отношение соседства — вспомните, как определялись соседние окружности). На разрезанном торе $\varphi(\alpha)$ изобразится отрезком, соединяющим основания цилиндра. Гомотопическая классификация таких отрезков это задача, эквивалентная вычислению фундаментальной группы цилиндра, и поэтому ясно, что некоторая степень преобразования ϱ переводит α в $\varphi(\alpha)$. Осталось, возможно, сменить знак, что соответствует умножению на σ^2. ■

Из теоремы 1 и предыдущей леммы немедленно следует

Теорема 2 *Элементы σ и ϱ порождают группу* $\mathrm{Map}(\mathbb{T}^2)$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathrm{Map}(\mathbb{T}^2)$. Соединим в графе X вершину $\alpha_n \overset{\mathrm{def}}{=} \varphi^{-1}(\alpha)$ с вершиной $\alpha_0 \overset{\mathrm{def}}{=} \alpha$ путем $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ (здесь мы использовали теорему 1). Применим индукцию по n. Рассмотрим преобразование ψ, которое ребро $\alpha_{n-1}\alpha_n$ переводит в ребро $\alpha\beta$. По предположению индукции, ψ представляется как произведение образующих. Тогда вершина $\psi(\varphi^{-1}(\beta))$ — соседняя с β, и поэтому (согласно лемме 1) для некоторого целого числа l преобразование $\varrho^l\psi\varphi^{-1}$ меняет местами α и β. Значит, это преобразование, в зависимости от знака, есть либо σ, либо σ^3, и теорема доказана. ■

Следствие (из теоремы 2 и формулы (1)) *Элемент σ^2 принадлежит центру* $\mathrm{Map}(\mathbb{T}^2)$.

На самом деле, теорема 2 дает больше: мы для каждого элемента $\varphi \in \mathrm{Map}(\mathbb{T}^2)$ и каждого пути, соединяющего α и $\varphi^{-1}(\alpha)$, получили каноническое представление вида

$$\varphi = (\sigma^2)\sigma\varrho^{l_1}\ldots\sigma\varrho^{l_n}. \tag{2}$$

(член в скобке может быть или не быть). Поэтому если в графе X есть два пути, соединяющие вершины α и $\varphi^{-1}(\alpha)$ (т.е., есть цикла, проходящий через вершину α), то мы получаем два представления элемента $\varphi \in \mathrm{Map}(\mathbb{T}^2)$ в виде произведения образующих, т.е., соотношение в группе $\mathrm{Map}(\mathbb{T}^2)$. Более того, из теоремы 2, следствия и очевидного равенства

$$\sigma^4 = 1 \tag{3}$$

видно, что *всякое* соотношение может быть так получено.

Например, тривиальный цикл $\alpha \to \beta \to \alpha$ дает соотношение (3), а цикл $\alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha$ приводит к соотношению

$$(\varrho\sigma)^3 = \sigma^2. \tag{4}$$

Теорема 3 *Группа* $\mathrm{Map}(\mathbb{T}^2)$ *порождается соотношениями (1), (3) и (4).*

Идея доказательства такова: рассмотрим два пути, соединяющих две вершины в графе X. Они соответствуют двум однопараметрическим семействам функций, f_t^0 и f_t^1, у который начало и конец совпадают. Можно показать — это "двупараметрический аналог" утверждения 3 — что такие два однопараметрических семейства всегда можно включить в двупараметрическое семейство функций f_t^τ, которое при всех значениях τ, кроме конечного числа, дает однопараметрическое семейство функций, похожее на описанное в утверждении 3, а при оставшихся — "катастрофических" — значениях τ имеет чуть более сложные особенности, типы которых, однако, вполне можно перечислить (ну, например: две критических точки сливаются, и на том же уровне есть еще одна критическая точка). Если это сделать, то как раз получится, что проход через "катастрофическое" значение τ либо не меняет слова (2) вовсе, либо состоит в применении к нему соотношения (4). То есть, других соотношений нет.

Задача 1. Докажите, что группа, определяемая соотношениями (1), (3) и (4), это группа $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Это — упражнение по общей алгебре, но забавно то, что проще всего идти в обратном порядке — дело в том, что равенство $\mathrm{Map}(\mathbb{T}^2) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ (и даже $\mathrm{Map}(\mathbb{T}^n) = \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$) можно доказать независимо от предыдущих рассуждений (и намного проще ...). Для этого нужно представить тор как факторпространство $\mathbb{R}^n$ по содержащейся в нем решетке $\mathbb{Z}^n$. Тогда диффеоморфизм тора превратится в диффеоморфизм $\mathbb{R}^n$, сохраняющий решетку. Теперь нужно только доказать — это примерно то же самое, что доказать утверждение 1 — что такой диффеоморфизм гомотопен *линейному* отображению (в классе диффеоморфизмов, сохраняющих решетку).

Кстати, если убрать соотношения (1) и (3), то получится группа, заданная двумя образующими и соотношением (4). Можно показать, что это — группа кос из трех нитей, а $\mathrm{Map}(\mathbb{T}^2) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, тем самым, является ее факторгруппой.

Что почитать на ночь ...

Тем же методом, которым мы воспользовались для вычисления $\mathrm{Map}(\mathbb{T}^2)$, можно вычислить и группу классов отображений произвольной двумерной ориентируемой поверхности без края (это отчасти оправдывает сложность наших рассуждений). Начало рассуждений почти такое же — строится граф X (вершинами его теперь будут системы из g неразрезающих окружностей, где g — род поверхности) и доказывается, что он связен. С соотношениями дело обстоит, правда, сложнее (кроме трехчленных циклов придется учитывать четырех- и пятичленные), но принцип тот же. Это все проделано в статье [16].

2 Топологии на пространствах сечений

2.1 Тонкая и компактно-открытая топологии

Рассмотрим расслоение $p : X \to M$ со слоем N (где X, M и N — многообразия, а отображение проекции p гладкое). Обозначим $C(X)$ пространство непрерывных сечений расслоения, т.е. таких непрерывных отображений $f : M \to X$, что $p \circ f = \mathrm{id}_M$. Чтобы задать топологию на $C(X)$, нужно задать *базу открытых множеств*, т.е., некий набор подмножеств $\mathfrak{A} = \{A \subset C(X)\}$, после чего считать множество $B \subset C(X)$ открытым, если для каждого его элемента $f \in B$ найдется множество $A \in \mathfrak{A}$ такое, что $f \in A \subset B$ (для того, чтобы получилась топология, нужно, чтобы $\mathfrak{A}$ обладало следующим свойством: если $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ имеют непустое пересечение, то найдется непустое $A_3 \in \mathfrak{A}$ такое, что $A_3 \subset A_1 \cap A_2$). Например, в обычной топологии $\mathbb{R}^n$ (или произвольного метрического пространства) базу составляют открытые шары.

В C^0-*тонкой топологии Уитни* базу составляют множества вида $C(U)$. Здесь U — произвольное открытое подмножество X, обладающее свойством $p(U) = X$, и множество $C(U)$ состоит из непрерывных сечений $f : M \to X$, *графики* которых принадлежат U.

Пример: Пусть $M = N = \mathbb{R}$ и расслоение X тривиально (в этом случае сечения это просто функции $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Тогда функция $g \equiv 0$ принадлежит замыканию множества $A \subset C(X)$, если последнее для каждой функции $\epsilon(t) > 0$ содержит функцию $f(t)$ такую, что $|f(t)| < \epsilon(t)$.

Топология Уитни — действительно "тонкая", т.е., в ней мало сходящихся последовательностей. А именно, имеет место

Предложение 4 *Последовательность сечений f_n сходится к сечению f тогда и только тогда, когда найдется компакт $K \subset M$ такой, что $f_n|_K \to f|_K$ равномерно, и при достаточно большом n $f_n(x)$ совпадает с $f(x)$ при $x \notin K$.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Необходимость: пусть такого компакта K не существует. Тогда найдется последовательность $x_n \in M$, не имеющая предельных точек и такая, что $f_n(x_n) \neq f(x_n)$. Рассмотрим окрестность U_n точки x_n такую, что U_n при разных n не пересекаются, и окрестность V_n точки $f(x_n) \in X$ такую, что $p(V_n) = U_n$ (и, следовательно, V_n при разных n тоже не пересекаются), и V_n не пересекается с графиком сечения f_n. Зафиксируем теперь компактные множества $K_n \subset U_n$, и рассмотрим подмножество $W \subset X$, которое с каждым слоем $N_y \subset X$ над точкой $y \in K_n$ пересекается по множеству $V_n \cap N_y$, а слои над всеми остальными точками содержит целиком. Множество W открыто, и поэтому можно рассмотреть множество $C(W) \subset C(X)$. Оно содержит f, но не содержит ни одного сечения f_n — вопреки предположению о сходимости. ■

Аналогичным образом имеет место

Предложение 5 *Если $f_t \to f_0$ при $t \to 0$, то найдется число $\epsilon > 0$ и компакт K такой, что $f_t(x) = f_0(x)$ при $x \notin K$ и $t < \epsilon$, и $f_t \rightrightarrows f_0$ на K.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Необходимость: если такого ϵ и компакта не найдется, то найдется последовательность $t_n \to 0$ и последовательность $x_n \in M$, не имеющая предельных точек, и такая, что $f_{t_n}(x_n) \neq f_0(x_n)$. Поэтому в силу Утверждения 4 $f_{t_n} \not\to f_0$ вопреки условию $f_t \to f_0$ при $t \to 0$. ■

Утверждения 4 и 5 показывают, что тонкая топология не приспособлена для рассмотрения "непрерывных деформаций" отображений. Например, если $M = N = I\!R$ и расслоение X тривиально, то семейство $f_t(x) = f(x) + t$ всегда разрывно в каждой точке, семейство $f_t(x) = tf(x)$ непрерывно только если носитель функции f компактен, семейство $f_t(x) = f(x+t)$ непрерывно только если $f(x) = const.$ вне некоторого компакта. Хуже того,

Предложение 6 *Если многообразие M некомпактно, то C^0-тонкая топология в $C(X)$ неметризуема (т.е., не порождается никакой метрикой).*

Доказательство. Докажем это для случая $M = N = I\!R$ и тривиального расслоения X, общий случай — аналогично. Пусть $K_n \subset I\!R$ — компакты, объединение которых не принадлежит никакому компакту в $I\!R$, и пусть $f_n : I\!R \to I\!R$ — функция с носителем K_n.

Пусть тонкая топология порождается метрикой ϱ. Семейство $f_n^t = tf_n$ непрерывно в силу компактности носителя f_n. Следовательно, найдется число δ_n такое, что $\varrho(\delta_n f_n, 0) < 1/n$. Тогда $\delta_n f_n \to 0$, вопреки Утверждению 4. ■

Более привычная топология на множестве непрерывных сечений — *компактно-открытая.* В этой топологии $f_n \to f$ означает равномерную сходимость на каждом компакте $K \subset M$, а база открытых множеств состоит из всех множеств вида $C(K,V)$. Здесь $K \subset M$ — достаточно маленький компакт (такой, что над K расслоение тривиально), $V \subset N$ — открыто, и $C(K,V)$ состоит из сечений $f : M \to X$ таких, что $f(x) \in V$ при $x \in K$ (а вне K — как угодно). Компактно-открытая C^0-топология в $C(X)$ метризуема. В случае компактного M нужно ввести метрику ϱ на многообразии N и положить $r(f,g) = \sup_{x\in M} \varrho(f(x), g(x))$. В случае некомпактного M вот конструкция метрики в случае тривиального расслоения X с $M = N = I\!R$ (общий случай — аналогично, только нужны какие-то технические слова про многообразия): пусть $p_n(f,g) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{n\le|x|\le n+1} |f(x) - g(x)|$, тогда метрика $r(f,g) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} p_n(f,g)/(1 + p_n(f,g))$.

Сравним тонкую и компактно-открытую топологии. При компактном M эти топологии, очевидно, совпадают. При некомпактном M тонкая топология (естественно...) *тоньше*, т.е., база открытых множеств тонкой топологии *содержит* базу открытых множеств компактно-открытой топологии. Поэтому имеют место такие факты:

- Если множество открыто (замкнуто) в компактно-открытой топологии, то оно открыто (соотв., замкнуто) в тонкой топологии (но не наоборот).
- "Тонкое" замыкание множества содержится в его компактно-открытом замыкании; отсюда, в свою очередь, следует, что
- Множество, всюду плотное в тонкой топологии (т.е., замыкание которого совпадает со всем пространством), всюду плотно и в компактно-открытой топологии.

Отсюда видно, что тонкая топология хорошо приспособлена для утверждений о всюду плотности.

2.2 Массивные множества

Определение. Множество A в топологическом пространстве называется *массивным*, если оно является пересечением счетного числа всюду плотных открытых множеств.

Очевидно, объединение и пересечение не более чем счетного числа массивных множеств массивно. Массивное множество не обязано быть открытым (например, все множества со счетным дополнением массивны, так что множество иррациональных чисел в $\mathbb{R}$ подходит). Для произвольного пространства массивное множество не обязано быть и всюду плотным (и даже непустым). Если это все же верно (а это верно для всех "нормальных" пространств), то говорят, что топологическое пространство обладает *свойством Бэра*.

Предложение 7 *Пространство $C(X)$ с тонкой C^0-топологией обладает свойством Бэра.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда M компактно. Топология в этом случае порождается "равномерной" метрикой r. Рассмотрим совокупность $\mathfrak{B}$, состоящую из всех замкнутых шаров в пространстве $C(X)$. Для каждого шара $B \in \mathfrak{B}$ определен его радиус $r(B) > 0$. Совокупность $\mathfrak{B}$ обладает следующими свойствами:

1. Всякое непустое открытое множество содержит подмножество $B \in \mathfrak{B}$.

2. Всякий элемент $\mathfrak{B}$ содержит непустое открытое подмножество.

3. Если $B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots$, и $r(B_n) \to 0$, то пересечение $\bigcap_n B_n$ непусто.

Последнее свойство равносильно полноте метрического пространства $C(X)$ и в данном случае легко доказывается. Вообще, приводимое здесь доказательство свойства Бэра для $C(X)$ при компактном M проходит для любого полного метрического пространства.

Пусть теперь множество A массивно, $A = \bigcap_n A_n$. Нам нужно доказать, что A всюду плотно, т.е. пересекается с произвольным открытым множеством C. Рассмотрим пересечение $C \cap A_1$. Оно непусто и открыто. Возьмем замкнутый шар $B_1 \subset C \cap A_1$ радиуса $r(B_1) < 1$ и непустое открытое множество $C_1 \subset B_1$. Рассмотрим пересечение $C_1 \cap A_2$ — оно опять непусто и открыто, возьмем $B_2 \subset C_1 \cap A_2$ радиуса $r(B_2) < 1/2$, и т.д. Последовательность вложенных шаров $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ имеет непустое пересечение. Это пересечение лежит в $A \cap C$, которое, тем самым, непусто.

Тем самым, "метрический" случай рассмотрен. Пусть теперь M некомпактно. Тогда у нас нет метрики и нет шаров, но рассуждение можно спасти, если придумать класс $\mathfrak{B}$ множеств, обладающих свойствами 1–3. Вот конструкция такого класса множеств в случае тривиального расслоения и $M = N = \mathbb{R}$. Он состоит из всех множеств вида $B(\alpha, \beta)$, где $\alpha = \{\alpha_n\}$ и $\beta = \{\beta_n\}$ — две числовых последовательности ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Множество $B(\alpha, \beta)$ это множество всех функций, удовлетворяющих условию $\alpha_n \le f(x) \le \beta_n$ при $n \le x \le n + 1$. "Радиусом" $r(B(\alpha, \beta))$ назовем число $\sup_n(\beta_n - \alpha_n)$. В случае произвольных M и N конструкция аналогична — проделайте ! ■

Жаргон: вместо того, чтобы говорить, что множество элементов (точек, отображений, и т.п.), обладающих некоторым свойством $\mathcal{A}$, массивно, говорят, что $\mathcal{A}$ выполнено для *элемента общего положения* (или для *типичного элемента*).

2.3 Пространство струй

Приведенная в разделе 2.1 конструкция тонкой топологии обладает одним недостатком — она никак не учитывает гладкую структуру на многообразиях M и X и гладкость сечений. Для того, чтобы исправить этот недостаток, мы определим два понятия — *расслоение r-струй* $X^{(r)} \to M$ и *r-струю* $J_r(f)$ сечения $f : M \to X$. Сама r-струя должна быть сечением $J_r(f) : M \to X^{(r)}$. Тогда *тонкая C^r-топология* на пространстве $C^r(X)$ гладких сечений исходного расслоения X определяется так: множество $A \subset C^r(X)$ гладких сечений открыто, если множество r-струй этих сечений открыто в тонкой C^0-топологии множества $C(X^{(r)})$.

Неформально говоря, струя это совокупность частных производных сечения f до r-го порядка включительно, а слой расслоения $X^{(r)}$ это множество всевозможных значений таких наборов частных производных. Формальное определение дать проще всего в ситуации, когда $M = \mathbb{R}^n$, расслоение X тривиально, а слой $N = \mathbb{R}$. Тогда сечение f это просто функция $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Расслоение $X^{(r)}$ в этом случае тоже тривиально, слой его это пространство $P_{r,n}$ многочленов степени не выше r от n переменных $p_1, \dots p_n$. Размерность слоя равна $d_r = \sum_{k=0}^{r} \begin{pmatrix} n+k-1 \\ n-1 \end{pmatrix}$. Оператор $J_r(f)$ определяется формулой Тейлора

$$J_r(f)(x) = \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0 \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq r}} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n} \qquad (5)$$

В случае тривиального расслоения над $\mathbb{R}^n$ со слоем $N = \mathbb{R}^m$ слой расслоения $X^{(r)}$ состоит из отображений $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, каждая компонента которых является многочленом степени не выше r. Размерность слоя равна md_r. В общем случае это можно принять за координатное описание расслоения $X^{(r)}$, но хочется все-таки дать инвариантное определение.

В общем случае мы определим расслоение $X^{(r)}$ и сечение $J_r(f)$ одновременно, индукцией по r. Слой расслоения $X^{(1)}$ над точкой $m \in M$ составляют, по определению, все линейные отображения $L : T_m M \to T_x X$, для которых $m = p(x)$ и $dp \circ L = \mathrm{Id} : T_m M \to T_m M$. Оператор J_1 сопоставляет сечению f его дифференциал $df(m) : T_m M \to T_{f(m)} X$.

Пример: Пусть $X = M \times \mathbb{R}$ тривиально. Сечения X имеют вид $\varphi_f(x) = \big(x, f(x)\big)$, где $f : M \to \mathbb{R}$ — некоторая функция. Слой $X^{(1)}$ состоит из линейных отображений $L : T_m M \to T_{(m,\alpha)} X = T_m M \times \mathbb{R}$, т.е., $L = \big(\tilde{L}, \lambda\big)$, где $\tilde{L}$ — линейное отображение $T_m M \to T_m M$, а $\lambda : T_m M \to \mathbb{R}$ — линейный функционал. Условие $dp \circ L = \mathrm{Id}$ означает, что $\tilde{L} = \mathrm{Id}$. Поэтому слой $X^{(1)}$ это $\mathbb{R} \times T_m^* M$ (первый сомножитель соответствует числу α, второй — функционалу λ), и $X^{(1)} = \mathbb{R} \times T^* M$. 1-струя $J_1(\varphi_f)(x) = \big(f(x), df(x)\big)$, где df — дифференциал.

На этом примере видно, что расслоение 1-струй может быть нетривиальным даже при тривиальном расслоении X. В разобранном выше случае расслоение 1-струй получилось векторным. Однако из общего определения видно, что слой $X^{(1)}$ канонически обладает лишь аффинной структурой (множество линейных операторов определяется линейным неоднородным соотношением). Тем не менее, слой диффеоморфен векторному пространству размерности mn, где $m = \dim M$ и $n = \dim N$.

В общем случае оператор J_{r+1} определяется как композиция оператора J_r и оператора J_1 для расслоения $\big(X^{(r)}\big)^{(1)} \to M$. $\big(X^{(r)}\big)^{(1)} \to M$ это расслоение 1-струй для расслоения $X^{(r)} \to M$. Расслоение $(r+1)$-струй $X^{(r+1)}$ это подрасслоение $(X^{(r)})^{(1)} \to M$, слой которого является образом оператора J_{r+1}.

В случае $M = \mathbb{R}^n$, $X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ имеем $X^{(r)} = \mathbb{R}^n \times P_{r,n}$, J_r задано формулой (5). Слой расслоения $(X^{(r)})^{(1)} \to M$ состоит из многочленов от переменных $p_1, \ldots, p_n$ и $q_1, \ldots, q_n$, линейных по q и имеющих степень не выше r по p. $X^{(r+1)}$ получается отождествлением $q_i = p_i$, что как раз и дает многочлены степени не выше $r+1$.

Если на многообразии M введены локальные координаты $x_1, \ldots, x_m$, а на слое N расслоения X — локальные координаты $y_1, \ldots, y_n$, то на слое расслоения $X^{(r)}$, лежащим над точкой с координатами x, появляются стандартные координаты — такие, что координаты струи $J_r(f)(x)$ являются частными производными координат сечения f по x (включая производные нулевого порядка, т.е., координаты самого сечения). Эти координаты будут обозначаться ξ^k $(1 \le k \le n), \xi_i^k$ $(1 \le i \le m, 1 \le k \le n), \xi_{i_1 i_2}^k$ $(1 \le i_1 \le i_2 \le m, 1 \le k \le n), \ldots, \xi_{i_1 \ldots i_r}^k$ $(1 \le i_1 \le \ldots \le i_r \le m, 1 \le k \le n)$.

Как мы видим, всякий элемент j слоя расслоения $X^{(r)}$ над точкой $m \in M$ может быть представлен в виде $j = J_r(f)(m)$, где f — некоторое сечение исходного расслоения X. Однако не всякое *сечение* расслоения $X^{(r)}$ имеет вид $J_r(f)$. Это хорошо видно уже в простейшем примере тривиального расслоения $X = M \times \mathbb{R}$. Здесь $X^{(1)} = \mathbb{R} \times T^*M$, и сечение $X^{(1)}$ это пара $\big(f(m), \nu(m)\big)$, где f — функция, а ν — 1-форма. Для того, чтобы сечение имело вид $J_1(f)$, нужно, чтобы $\nu = df$ (в частности, форма ν должна быть точной). Сечения расслоения $X^{(r)}$ вида $J_r(f)$ называются *голономными* или *интегрируемыми.*

Аналогично C^0-топологиям можно определить компактно-открытую и тонкую C^r-топологии на пространстве гладких сечений. Тонкая C^r-топология определяется базой, состоящей из множеств вида $C(U)$, где U — открытое подмножество $X^{(r)}$, обладающее свойством $p^{(r)}(U) = M$ ($p^{(r)}$ — отображение расслоения $X^{(r)} \to M$). Множество $C(U)$ состоит из сечений $f : M \to X$, графики r-струй которых лежат в U. Компактно-открытая C^r-топология это топология равномерной сходимости на любом компакте $K \subset M$ вместе с производными до r-го порядка включительно. Все сказанное о C^0-топологии, включая Утверждение 7, легко переносится на C^r-топологию. Проверьте, кстати, что приведенное определение и определение, данное в начале раздела 2.3, совпадают.

Что почитать на ночь ...

Использованное в лекции определение расслоения струй заимствовано из книги М.Громова [7]. Книга трудная, но очень содержательная (содержательная, но очень трудная ...); мы еще неоднократно в этих лекциях будем к ней обращаться. О струях также написано в томе 1 знаменитого двухтомника [3]. Там же обсуждается понятие тонкой топологии Уитни. Свойство Бэра для полных метрических пространств доказано в любом более или менее приличном курсе функционального анализа, например в книге

Канторовича и Акилова [9]. Есть также специальная книга Дж.Окстоби [13] (для любителей теории множеств и тому подобных вещей).

3 Трансверсальность

3.1 Трансверсальность в линейных пространствах

Пусть U — линейное пространство. Два линейных подпространства $V, W \subset U$ называются *трансверсальными*, если $V + W = U$. Пространства предположим конечномерными: $\dim U = n, \dim V = k, \dim W = m$. Пусть V фиксировано, а пространство W пробегает грассманиан $G(U, m)$. Тогда верно

Предложение 8 *Множество подпространств W, трансверсальных к V, пусто, если $m + k < n$, и массивно (на самом деле, открыто и всюду плотно) в $G(U, m)$, если $m + k \geq n$.*

Доказательство. Случай $m+k < n$ очевиден. Случай $m+k \geq n$ тоже, в общем, очевиден, но приведем "для полноты" доказательство. Множество подпространств, не трансверсальных к V, состоит из подпространств W таких, что $\dim V \cap W \geq m + k + 1 - n$. Таким образом, для каждого W, не трансверсального к V, можно выбрать подпространство $A \subset V \cap W$, принадлежащее $G(V, m + k + 1 - n)$. Пусть теперь последовательность подпространств W_s сходится (в $G(U, m)$) к W, и все W_s не трансверсальны к V. Тогда выберем соответствующие подпространства $A_s \in G(V, m + k + 1 - n)$. Грассманиан $G(V, m+k+1-n)$ компактен, поэтому без ограничения общности можно считать, что последовательность $A_s \to A \in G(V, m + k + 1 - n)$. Но тогда $A \subset V \cap W$, и поэтому W не трансверсально к V. Таким образом, множество подпространств, не трансверсальных к V, замкнуто, а трансверсальных — открыто.

Чтобы установить всюду плотность, нужно доказать, что подпространство W, не трансверсальное к V, можно сколь угодно мало пошевелить так, что оно станет трансверсальным. Для этого выберем базис $e_1, \dots, e_k$ в V, базис вида $e_1, \dots, e_s, a_1, \dots, a_{m-s}$ в W (предполагается, что $a_1, \dots, a_{m-s} \notin V$), и базис $f_1, \dots, f_{n+s-m-k}$ в прямом дополнении к $V + W$ в U. Тогда вектора e_i, a_i и f_i вместе составляют базис пространства U. Из условия на размерности заключаем, что $n + s - m - k \leq s$, и поэтому можно рассмотреть пространство W_ϵ, базис которого составляют вектора $e_i + \epsilon f_i$ при $1 \leq i \leq n + s - m - k$, e_i при $n + s - m - k + 1 \leq j \leq s$, и все a_i. Очевидно, что при малом ϵ пространство W_ϵ сколь угодно близко к W, и при всяком $\epsilon \neq 0$ оно трансверсально V. ■

Пусть теперь U и V — два линейных пространства, и $W \subset U$ — подпространство. Говорят, что линейное отображение $A : V \to U$ трансверсально к W, если образ $A(V) \subset U$ — подпространство, трансверсальное к W. Размерности U, V и W будем по-прежнему обозначать n, m и k.

Предложение 9 *Если $m + k < n$, то никакое линейное отображение не трансверсально к W. Если $m + k \geq n$, то отображение $A \in \mathrm{Lin}(V, U)$ общего положения трансверсально к W.*

Докажем сначала вспомогательное утверждение:

Предложение 10 *Отображение $A \in \mathrm{Lin}(V, U)$ общего положения имеет максимальный ранг.*

Доказательство. Множество отображений не максимального ранга задается системой уравнений (равенство нулю миноров), и поэтому замкнуто. Всюду плотность доказывается так же, как в Утверждении 8. ■

Теперь утверждение 9 легко следует из утверждения 10. Действительно, если $k \geq n$, то для общего A образ $A(V) = U$ трансверсален любому W. Если $k < n$, то из утверждения 10 следует, что $\dim A(V) = k$ для общего A. Рассмотрим отображение, сопоставляющее элементу $A \in \mathrm{Lin}(V, U)$ максимального ранга его образ $A(V) \in G(U, k)$. Это отображение непрерывно, поэтому из утверждения 8 следует, что множество линейных операторов полного ранга, трансверсальных к W, открыто. Для доказательства всюду плотности воспользуемся той же идеей, что в утверждении 8: пусть P — проектор, отображающий $A(V)$ на дополнение к $A(V) + W \subset U$ (такой проектор существует в силу соотношения размерностей). Тогда оператор $(I + \epsilon P)A$ трансверсален к W.

3.2 Трансверсальность к подмногообразию

Пусть A — многообразие, а B и C — его подмногообразия. Они называются *трансверсальными в точке* x если либо x не принадлежит их пересечению, либо $T_xB + T_xC = T_xA$. Подмногообразия называются *трансверсальными*, если они трансверсальны в любой точке. Гладкое отображение многообразий $f : B \to A$ называется трансверсальным к подмногообразию $C \subset A$ в точке $x \in B$, если либо $f(x) \notin C$, либо $D_xf(T_xB) + T_{f(x)}C = T_{f(x)}A$ (D_x — дифференциал отображения в точке x). Отображение f называется трансверсальным к C, если оно трансверсально к C в любой точке $x \in B$.

Если отображение f трансверсально к C, то его образ $f(B)$, очевидно, также трансверсален к C. Обратное неверно: отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданное формулой $f(t) = t^3$, не трансверсально к точке $0 \in \mathbb{R}$, но его образ $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ трансверсален. Это связано с тем, что касательное пространство к образу $f(B)$ в точке $f(x)$ обязательно содержит образ $D_xf(T_xB)$, но не обязательно совпадает с ним. Из теоремы о неявной функции следует, что если f трансверсально к $C \subset A$, то прообраз $f^{-1}(C) \subset B$ — гладкое подмногообразие, коразмерность которого в B равна коразмерности подмногообразия C в многообразии A. В частности, если $\operatorname{codim}_A C > \dim B$, то трансверсальность означает, что $f^{-1}(C) \subset B$ пусто, т.е., $f(B)$ не пересекается с C.

Тривиальное Замечание 1. Отображение $f : B \to A$ трансверсально к объединению подмногообразий $C_1, C_2 \subset A$ тогда и только тогда, когда оно трансверсально к каждому из них.

Тривиальное Замечание 2. Если $B = B_1 \cup B_2$, то $f : B \to A$ трансверсально к подмногообразию $C \subset A$ тогда и только тогда, когда этим свойством обладают ограничения $f|_{B_1}$ и $f|_{B_2}$.

Возьмем сначала в качестве многообразий линейные пространства U, V, а в качестве отображений — аффинные отображения.

Предложение 11 *Аффинное отображение $f(x) = Ax + b$ общего положения двух линейных пространств трансверсально к произвольному аффинному подпространству W пространства-образа.*

Заметим, что здесь нет никаких ограничений на размерность.

Доказательство. В случае, когда размерности удовлетворяют неравенству $m + k \geq n$, то трансверсальность обеспечивается, если взять линейное отображение A, трансверсальное к линейному подпространству $\widetilde{W}$, параллельному W, а b взять произвольным. Если же $m + k < n$, то в общем положении образ $f(V)$ не пересекает W, что и означает трансверсальность. Чтобы добиться этого, можно взять произвольное A, а b выбрать трансверсальным к подпространству $A(V) + \widetilde{W} \subset U$ — согласно утверждению 8, это условие общего положения. ■

Это утверждение допускает далеко идущее "нелинейное" обобщение:

Теорема 4 (Тома о трансверсальности) *Пусть $X \to M$ — гладкое расслоение, и $S \subset X^{(r)}$ — гладкое подмногообразие. Тогда для бесконечно гладкого сечения $f : M \to X$ общего положения (в тонкой C^r-топологии) его струя $J_r(f)$ трансверсальна к S.*

3.3 Лемма Сарда

Начнем со вспомогательного утверждения (называемого в разных источниках теоремой Морса, леммой Сарда, леммой Брауна, леммой Тома и др. ...):

Предложение 12 *Гладкая функция $f : S \to \mathbb{R}$ трансверсальна к точке общего положения $a \in \mathbb{R}$.*

Иными словами, для $a \in \mathbb{R}$ общего положения не существует точки $s \in S$ такой, что $f(s) = a$ и $df(s) = 0$. После доказательства теоремы

Тома мы увидим, что для *типичной* функции f все критические (с $df = 0$) точки изолированы, и утверждение 12 очевидно. Мы, однако, пока не предполагаем *функцию* f типичной.

Доказательство. Индукция по $n = \dim S$. Многообразие S можно представить как объединение не более чем счетного числа шаров. Поскольку понятие массивности множества выдерживает счетные пересечения, можно считать (см. Тривиальное Замечание 1 выше), что S — n-мерный шар.

Пусть A — множество критических точек функции f. Нам нужно доказать, что $\mathbb{R} \setminus f(A)$ массивно. Разобьем множество A критических точек функции f на $n+1$ подмножество $A_1, \ldots, A_{n+1}$. В A_k $(1 \le k \le n)$ войдут точки $s \in S$, для которых все частные производные функции f до k-го порядка включительно, равны нулю, но существует частная производная порядка $k+1$, отличная от нуля. A_{n+1} состоит из всех оставшихся критических точек. Нам нужно доказать, что все множества $\mathbb{R} \setminus f(A_k)$ массивны.

С множествами A_k $(1 \le k \le n)$ дело обстоит так. В каждой точке $x \in A_k$ найдется мультииндекс $I = (i_1, \ldots, i_{k+1})$ такой, что частная производная $\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{k+1}}} \neq 0$. Таким образом, множество A_k разбито на конечное число кусков A_{kI}, где I пробегает множество мультииндексов (некоторые из этих кусков могут быть пустыми; заведомо некоторые из них пересекаются, но это неважно). Для каждого куска A_{kI} введем функцию $h_I = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}$, и заметим, что A_{kI} лежит в множестве B_{kI}, заданном условиями $h_I = 0$, $\frac{\partial h_I}{\partial x_{i_{k+1}}} \neq 0$. Из теоремы о неявной функции следует, что B_{kI} — гиперповерхность, т.е., подмногообразие многообразия S размерности $n-1$. Любая точка $s \in A_{kI}$ является критической для ограничения $f|_{B_{kI}}$ функции f на гиперповерхность B_{kI}. Для этого ограничения лемму можно считать доказанной — индукция по размерности многообразия S ! — и поэтому множество $\mathbb{R} \setminus f(A_{kI})$ массивно, а вместе с ним и $\mathbb{R} \setminus f(A_k)$ $(1 \le k \le n)$.

Осталось доказать аналогичный факт про $\mathbb{R} \setminus f(A_{n+1})$. Множество A_{n+1} может быть устроено весьма плохо, но оказывается, что оно достаточно "маленькое", так что это неважно. Докажем, что дополнение к $f(A_{n+1})$ в $\mathbb{R}$ открыто и всюду плотно. Открытость дополнения, т.е. замкнутость $f(A_{n+1})$, следует из компактности A_{n+1} — это замкнутое подмножество компактного шара S. Докажем всюду плотность. Для любого $\epsilon > 0$ множество A_{n+1} (как и любое подмножество шара S) может быть покрыто $N < const. \cdot \epsilon^{-n}$ шарами радиуса ϵ. По теореме Тейлора образ $f(A_{n+1})$ покрывается N интервалами длины не более $const. \cdot \epsilon^{n+1}$ каждый. Поэтому $f(A_{n+1})$ может быть покрыто конечной системой интервалов суммарной длины не более $const. \cdot \epsilon$, т.е., произвольно малой. Если бы $f(A_{n+1})$ содержало некоторый интервал J (это и означает, что дополнение к $f(A_{n+1})$ не всюду плотно), то $f(A_{n+1})$ нельзя было бы покрыть конечной системой интервалов, суммарная длина которых меньше длины интервала J. ■

Доказанное утверждение верно и в случае, когда гладкость функции конечна. В доказательстве на самом деле используется существование $n+1$-й производной, где n — размерность S. Это одно из проявлений важного общего принципа, что функция на многообразии S "ведет себя хорошо", если ее гладкость порядка размерности многообразия.

Из утверждения 12 следует

Предложение 13 *Пусть S — гладкое подмногообразие прямого произведения $M \times \mathbb{R}^d$. Тогда оно трансверсально к подмногообразию $M \times \{a\}$ для общего $a \in \mathbb{R}^d$.*

Доказательство. Как и в Утверждении 12, можно считать S n-мерным шаром. Определим отображение $\pi : M \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ — проекцию на второй сомножитель — и заметим, что множество Z точек $a \in \mathbb{R}^d$ таких, что S трансверсально к $M \times \{a\}$, это в точности множество тех a, к которым трансверсально отображение $\pi|_S$. Из этого сразу следует, что множество Z открыто: дополнение к Z это множество значений π в тех точках, где $d(\pi|_S) = 0$, т.е., непрерывный образ компакта.

То, что $Z \subset \mathbb{R}^d$ всюду плотно, докажем совместной индукцией по d и $n = \dim S$. База $d = 1$ следует из утверждения 12. При произвольном d из утверждения 12 следует, что для общего $x \in \mathbb{R}^1$ подмногообразие S трансверсально к $M \times \mathbb{R}^{d-1} \times \{x\}$. Для таких x пересечение $S_x = S \cap M \times \mathbb{R}^{d-1} \times \{x\}$ является $n-1$-мерным многообразием, которое по предположению индукции трансверсально к $M \times \{y\}$ для общего y. Очевидно, если S_x трансверсально к $M \times \{y\}$, то $(y, x) \in Z$. Из свойства Бэра для $\mathbb{R}^d$ следует теперь, что множество Z всюду плотно. ■

Доказательству и применениям теоремы Тома будет посвящена следующая лекция.

Что почитать на ночь ...

Лемма Сарда доказана во многих источниках, в частности, у Громова [7] (где доказано также Утверждение 13) и в замечательной книге Р.Нарасимхана [12]. В большинстве книг, правда, доказывается другой вариант леммы Сарда, а именно, то утверждение, что множество критических значений функции имеет лебегову меру нуль. Приведенное в тексте доказательство легко модифицировать так, чтобы доказать и этот факт тоже. Нам он в такой формулировке не понадобится, потому что в бесконечномерных пространствах, которым в основном посвящены лекции (пространствах отображений, сечений и т.п.), не существует меры (по крайней мере лебеговой, т.е., трансляционно инвариантной), и вместо множеств полной меры приходится использовать массивные множества.

4 Теорема Тома

4.1 Формулировка и доказательство

Теорема (Тома о трансверсальности) *Пусть $X \to M$ — гладкое расслоение, и $S \subset X^{(r)}$ — гладкое подмногообразие. Тогда для бесконечно гладкого сечения $f : M \to X$ общего положения (в тонкой C^{r+1}-топологии) его струя $J_r(f)$ трансверсальна к S.*

Доказательство. Прежде всего, как и в доказательстве утверждения 3.5, S можно представить в виде счетного объединения маленьких компактных шаров, и, следовательно, достаточно доказать теорему в случае, когда S — такой шар. Докажем, что в этом случае множество сечений расслоения $X \to M$, r-струи которых трансверсальны к S, открыто и всюду плотно. Условие того, что некоторое сечение g расслоения $X^{(r)} \to M$ трансверсально к S в фиксированной точке $m \in M$, как следует из утверждения 3.4, задает открытое условие на 1-струю сечения g в точке m. Но поскольку S компактно, то трансверсальность к S — открытое условие на график сечения $J_1(g)$. Поэтому множество A сечений f расслоения $X \to M$, r-струи которых трансверсальны к S, открыто в тонкой C^{r+1}-топологии — см. определение базы этой топологии.

Теперь нужно доказать, что множество A всюду плотно, т.е., что произвольное сечение $f_0 : M \to X$ может быть аппроксимировано сечениями из A. Поскольку шар S маленький, расслоение $X^{(r)} \to U \subset M$ тривиально (здесь U — проекция шара S на базу расслоения), т.е. имеет вид $U \times \mathbb{R}^{n\,d(r,m)}$. Более того, мы можем зафиксировать тривиализацию так, чтобы график сечения $J_r(f_0)$ имел вид $U \times \{0\}$. Для каждого $z \in \mathbb{R}^{m d_r}$ существует сечение $f_z : U \to X^{(r)}$ такое что $J_r(f_z)(U) = U \times z$ (это относится и к f_0). Чтобы его построить, нужно просто прибавить к f_0 многочлен, соответствующий точке $z \in \mathbb{R}^{n\,d(r,m)} = P^n_{r,m}$ (координаты, от которых нужно брать многочлен, у нас уже фиксированы, так как тривиализация расслоения задана). Более того, можно продолжить сечение f_z до сечения f_z^ϵ, определенного на всем M, совпадающего с f_z над U и с f_0 вне ϵ-окрестности U. Из утверждения 3.6 следует, что для общего z (и произвольного ϵ) r-струя сечения f_z^ϵ трансверсальна к S. Поэтому множество z таких, что $f_z^\epsilon \in A$, плотно. Но $f_z^\epsilon \to f_0$ при $z, \epsilon \to 0$, поэтому A плотно. Теорема доказана. ■

4.2 Особые точки

Применим теорему Тома к исследованию множества критических точек гладкой функции общего положения на многообразии. Таким образом, у нас расслоение $X = M \times \mathbb{R}$ тривиально, и $X^{(1)} = \mathbb{R} \times T^*M$. В качестве подмногообразия S выберем $\mathbb{R} \times \{0\}$, где $\{0\}$ обозначает график нулевого сечения. Размерности: $\dim M \stackrel{\text{def}}{=} m$, $\dim X^{(1)} = 2m + 1$, $\dim S = m + 1$.

Согласно теореме Тома для функций $f : M \to \mathbb{R}$ общего положения 1-струя соответствующего сечения $\varphi_f(x) = \bigl(x, f(x)\bigr)$ трансверсальна к S.

Утверждение, что $J_1(\varphi_f)(x) \in S$ означает, что $df(x) = 0$, т.е., x — критическая точка функции f. Если $J_1(\varphi_f)$ трансверсальна к S, то множество критических точек является замкнутым подмногообразием M коразмерности, равной коразмерности $S \subset X^{(1)}$, т.е., m (замкнутым, потому что $S \subset X^{(1)}$ замкнуто). Иными словами, для функции общего положения ее критические точки изолированы.

Введем на многообразии M локальные координаты $x_1, \dots, x_m$ в окрестности точки x (координаты которой все равны нулю). Тогда на $X^{(1)}$ есть стандартные координаты $\alpha, x_1, \dots, x_m, p_1, \dots, p_m$ (здесь $p_i = dx_i$, а координата α соответствует первому сомножителю). Базис в касательном пространстве к $X^{(1)}$ в точке (a, ν) составляют векторы $\frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}, \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_m}$. Первые $m{+}1$ из них составляют базис в $T_{(a,\nu)}S$. Но $D_x(J_1(\varphi_f))(\sum_{k=1}^m u_k p_k) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) u_k \frac{\partial}{\partial \alpha} + \sum_{k+1}^m u_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{k,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x) u_j \frac{\partial}{\partial p_k}$. Поэтому утверждение, что $J_1(\varphi_f)$ трансверсальна к S в точке x (т.е., что $D_x(J_1(\varphi_f))(T_x M) + T_{(f(x),df(x))}S = T_{(f(x),df(x))}X^{(1)}$), означает, что матрица Гессе $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ обратима. Таким образом, у функции общего положения все критические точки невырождены.

Для рассмотрения следующего примера нам потребуется

Лемма 2 *Множество матриц $m \times n$ ранга $k \le m$ является гладким многообразием размерности $k(n + m - k)$.*

Доказательство. Указанное множество является орбитой естественного действия группы $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_m$ на множестве матриц $n \times m$, и поэтому представляет собой гладкое многообразие. Размерность определяется так (предполагаем, что $m \le n$): чтобы задать оператор из m-мерного пространства в n-мерное, образ которого имеет размерность k, нужно сначала выбрать его образ — это $\dim G(n, k) = k(n - k)$ параметров. После этого нужно задать оператор полного ранга из m-мерного пространства в k-мерное. Поскольку оператор общего положения имеет полный ранг, это еще $\dim \mathrm{Mat}(m, k) = mk$ параметров. ■

Пусть теперь $\dim N \stackrel{\mathrm{def}}{=} n \ge m \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dim M$. Гладкое отображение $f : M \to N$ называется *погружением* (или *иммерсией*), если его дифференциал в каждой точке имеет ранг m (максимально возможный). Расслоение $X^{(1)}$ для тривиального расслоения $X = M \times N \to M$ (сечения которого имеют вид $\varphi_f(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (x, f(x))$) это пространство, расслоенное над $M \times N$, слой которого над точкой (a, b) состоит из линейных отображений $T_a M \to T_b N$. Определим многообразия $S_k \subset X^{(1)}$ $(k = 0, \dots, m - 1)$, которые пересекаются с каждым слоем по совокупности всех отображений $T_a M \to T_b N$ ранга k. Согласно Лемме 2, S_k является подмногообразием $X^{(1)}$ коразмерности $mn - k(n + m - k) = (m - k)(n - k)$.

Согласно теореме Тома, для отображения $f : M \to N$ общего положения струя $J_1(\varphi_f)$ соответствующего сечения трансверсальна всем S_k. Условие $J_1(\varphi_f)(x) \in S_k$ означает, что $df(x) : T_x M \to T_{f(x)} N$ имеет ранг k. Коразмерность множества $M_k = \big(J_1(\varphi_f)\big)^{-1}(S_k) \subset M$ равна, тем самым, $(m-k)(n-k)$. Наименьшей является, как и следовало ожидать, коразмерность множества M_{m-1}, равная $n - m + 1$. Если $n \geq 2m$, то эта коразмерность больше m, и поэтому множество M_{m-1} пусто (а все остальные M_k и подавно). Значит, если $n \geq 2m$, то отображение $M \to N$ общего положения является погружением. Например, типичная кривая в $S^1 \to \mathbb{R}^n$ при $n \geq 2$ — погруженная, т.е., гладкая.

4.3 Самопересечения

На самом деле мы можем сказать про кривые больше. Например, ясно, что кривая общего положения в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ — вложенная, т.е., не имеет точек самопересечения. Кривая в $\mathbb{R}^2$ в общем положении имеет трансверсальные самопересечения. Эти факты не следуют напрямую из теоремы Тома, т.к. "самопересечение" это условие, включающее *две* точки, а теорема Тома приспособлена для работы только с *локальными* условиями.

Для того, чтобы работать с самопересечениями, нам нужно следующее обобщение теоремы Тома. Для расслоения $X \to M$ рассмотрим его k-ю прямую степень $X^k \to M^k$. Удалим из M^k *диагональ* $\Delta(M^k)$, т.е., все точки вида $(x_1, \ldots, x_k)$, у которых $x_i = x_j$ для некоторых $i \neq j$.

Теорема 5 *Пусть S — подмногообразие $(X^k)^{(r)}$, лежащее над $M^k \backslash \Delta(M^k)$. Тогда для сечения $f : M \to X$ общего положения r-струя $J_r(f^k)$ трансверсальна к S.*

Здесь символом f^k обозначено сечение $M^k \setminus \Delta(M^k) \to X^k$, действующее по формуле $f^k(x_1, \ldots, x_k) = (f(x_1), \ldots, f(x_k))$.

Доказательство теоремы 5 полностью копирует доказательство теоремы Тома. Единственное отличие — в конструкции "шевеления" f_z. Здесь требуется для *набора* точек $x_1, \ldots, x_k$ построить функцию, которая в окрестностях этих точек имела бы заданные r-струи, а вне некоторых чуть больших окрестностей тех же точек не отличалась от f_0. Это, очевидно, возможно, если среди точек x_i нет одинаковых — поэтому и нужно выбрасывать диагональ.

Заметим, что если диагональ не выбрасывать, то теорема просто неверна. Действительно, рассмотрим, для простоты, тривиальное расслоение X со слоем N, и степень $k = 2$. В качестве S возьмем диагональ $\Delta(N \times N) \times (M \times M) \subset X$ (это пространство 0-струй). Образ *произвольного* отображения $f^2 : M^2 \to N^2$ пересекается с S — достаточно рассмотреть образ диагонали $\Delta(M \times M)$. Между тем, если отображение f^2 трансверсально к S, то прообраз $(f^2)^{-1}(S) \subset M^2$ должен иметь коразмерность

$n = \dim N$. Поэтому если $\dim M^2 = 2m < n$, то пересечения не должно быть.

Применим теперь теорему 5 к тому же подмногообразию $S = \Delta(N \times N)$. В случае $2m < n$ получается, что для отображения общего положения образ $M^2 \setminus \Delta(M^2)$ не пересекается с S, т.е., точки самопересечения отсутствуют. В частности, кривая общего положения в $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 3$ самопересечений не имеет. В случае $2m \geq n$ точки самопересечения образуют подмногообразие M^2 размерности $2m - n$. Кроме того, в каждой точке самопересечения (x_1, x_2) выполняется условие $D_{x_1} f(T_{x_1} M) + D_{x_2} f(T_{x_2} M) = T_{f(x_1)} N$, т.е., самопересечение трансверсально. В случае кривых на плоскости ($M = S^1, N = \mathbb{R}^2$) получится, что точки самопересечения изолированы, и касательные к пересекающимся кускам кривой в каждой точке не совпадают. Для k-кратных точек самопересечения анализ проводится так же. Условие отсутствия таких точек будет $km < (k-1)n$. В частности, все точки самопересечения типичной кривой в $\mathbb{R}^2$ — простые.

Другое применение теоремы 5 — критические точки функций на многообразии. В этом случае $X^2 = \mathbb{R}^2 \times M^2$, а $(X^2)^{(1)} = \mathbb{R}^2 \times (T^* M)^2$. Рассмотрим многообразие $S = \Delta(\mathbb{R}^2) \times \{0\} \times \{0\}$. Его коразмерность равна $2m+1$, и поэтому для функции $f : M \to \mathbb{R}$ общего положения график 1-струи соответствующего сечения $J_1(\varphi_f^2)$ с многообразием S не пересекается. Условие $J_1(\varphi_f^2)(x, y) \in S$ означает, что $df(x) = df(y) = 0$ и $f(x) = f(y)$. Следовательно, у функции общего положения значения в разных критических точках не совпадают, и она, таким образом, является функцией Морса.

4.4 Семейства сечений

Исследуем подробнее типичные кривые в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Мы установили, что они все гладкие, а в $\mathbb{R}^3$ еще и вложенные, т.е., не имеют точек самопересечения (являются узлами). Оказывается, однако, что если рассматривать не индивидуальные кривые, а их семейства, то могут появляться особенности. k-параметрическим семейством кривых называется отображение $I^k \times S^1 \to \mathbb{R}^3$, где $I = [0, 1]$.

Рассмотрим тривиальное расслоение $X = S^1 \times \mathbb{R}^3 \to S^1$ и связанное с ним (тоже тривиальное) расслоение $Y = I^k \times (S^1)^2 \times (\mathbb{R}^3)^2 \to I^k \times (S^1)^2$. k-параметрическому семейству кривых $f(t_1, \ldots, t_k, x)$ сопоставим сечение расслоения Y: $\varphi_f(t_1, \ldots, t_k, x) = (t_1, \ldots, t_k, x, x, f(t_1, \ldots, t_k, x), f(t_1, \ldots, t_k, x))$. Рассмотрим многообразие $S = I^k \times (S^1)^2 \times \Delta(\mathbb{R}^3)^2 \subset Y$. Коразмерность S в Y равна 3, поэтому при $k \geq 1$ множество $\varphi_f^{-1}(S) \subset I^k \times (S^1)^2$ непусто. Это множество состоит из точек $(t_1, \ldots, t_k, x, y)$ таких, что $f(t_1, \ldots, t_k, x) = f(t_1, \ldots, t_k, y)$. Таким образом, уже в типичных однопараметрических семействах узлов появляются изолированные значения параметра, при которых происходят самопересечения. Нетрудно убедиться, что k-кратные самопересечения появляются впервые в типичных k-параметрических семействах.

Для многопараметрических семейств самопересечения — не единственные возможные особенности. Рассмотрим расслоение $I^k \times X^{(1)} = I^k \times \mathbb{R}^3 \times (T^*S^1)^3 \to I^k \times S^1$, и в нем подмногообразие $U = I^k \times \mathbb{R}^3 \times \{0\} \times \{0\} \times \{0\}$. Коразмерность U равна 3, поэтому при $k \geq 2$ график 1-струи сечения φ_f (для типичного f) пересекается с U. Значит, в типичных двупараметрических семействах кривых в $\mathbb{R}^3$ имеются (изолированные) точки негладкости.

Задача 2. Постройте явно пример двупараметрического семейства с типичной точкой негладкости. Исследуйте, какого характера могут быть нарушения гладкости в двупараметрических семействах (для этого нужно более подробно выяснить, что означает трансверсальность многообразию к U). При каком числе параметров появляются более сложные нарушения гладкости ?

Рассмотрим теперь тот же результат с "бесконечномерной" точки зрения. Множество всех *кривых* $f : S^1 \to \mathbb{R}^3$ является линейным топологическим пространством (в компактно-открытой топологии), обозначим его V. Говорят, что подмножество $M \subset V$ имеет коразмерность не ниже $k+1$, если типичное k-параметрическое семейство кривых с M не пересекается. Рассмотрим оператор вложения $\iota : V \setminus M \hookrightarrow V$. Если M имеет коразмерность не ниже $k+1$, то $\iota_* : H_s(V \setminus M) \to H_s(V)$ является изоморфизмом при $s \leq k-1$ и, следовательно, $H_s(V \setminus M) = 0$ при таких s.

Пусть $V_0 \subset V$ — множество узлов, а $V_k \subset V$ множество гладких кривых с ровно k трансверсальными самопересечениями. Мы установили, что $U_2 \stackrel{\text{def}}{=} V \setminus (V_0 \cup V_1)$ имеет коразмерность 2. Поэтому вложение $\iota : V_0 \cup V_1 \hookrightarrow V$ порождает взаимно однозначное отображение связных компонент этих пространств, т.е., $V_0 \cup V_1$ связно.

Чтобы получить множество U_{k+1} коразмерности $k+1$, нужно из V убрать множества ("страты"), соответствующие кривым с теми особенностями, которые встречаются в k-параметрических семействах кривых. Например, для $k = 2$ есть такие страты (помимо стратов V_0 и V_1, входящих уже в U_2): V_2, страт кривых с одним тройным самопересечением (три ветви в одной точке) и страт кривых с одной точкой возврата. Замечательный результат В.А.Васильева заключается в том, что достаточно убирать только V_k: несмотря на то, что $V \setminus (\bigcup_{s=0}^k V_s)$ имеет коразмерность меньше k, вложение $\iota : V \setminus (\bigcup_{s=0}^k V_s) \hookrightarrow V$ порождает изоморфизм гомологий вплоть до размерности $k-1$. Тем самым $H_s(V \setminus (\bigcup_{s=0}^k V_s)) = 0$ при $0 \leq s \leq k-1$, и можно вычислять гомологии множества V_0 (т.е., множества узлов), исходя из точной последовательности пары $(V \setminus (\bigcup_{s=0}^k V_s), V \setminus (\bigcup_{s=1}^k V_s))$. Это составляет основу теории *инвариантов конечного типа* (или *инвариантов Васильева*) узлов.

В заключение — еще две задачи.

Задача 3. Изучите критические точки типичных однопараметрических семейств функций общего положения $f(t,x) : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Здесь

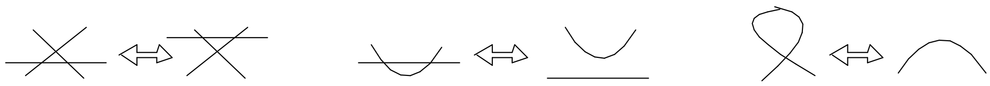


Рис. 2: Типичные особенности семейств кривых

подмногообразие S нужно выбрать таким, чтобы $J_1(f(t,x)) \in S$ означало $d_x f(t,x) = 0$. Из трансверсальности $J_1(f(t,x))$ к S получится, что многообразие $A = \{(t,x) \mid d_x f(t,x) = 0\}$ одномерно. Для $t \in \mathbb{R}$ общего положения многообразие A пересекает многообразие $M \times t$ трансверсально. Для таких t все критические точки функции $f(t,\cdot)$ невырождены. Для остальных ("катастрофических") t многообразие A касается многообразия $M \times t$ невырожденным образом. При таких t две критических точки функции $f(t,\cdot)$ сливаются в одну — вырожденную — и исчезают (или наоборот, появляются). Установите, что в общем положении вырождение критической точки функции $f(t,\cdot)$ при катастрофическом $t = t_0$ одномерно (т.е. матрица Гессе $\partial^2 f(t,x)/\partial x_i \partial x_j$ имеет одномерное ядро). Получите отсюда, что индексы сливающихся при $t \to t_0$ невырожденных критических точек отличаются на единицу (индексом невырожденной критической точки называется число отрицательных собственных значений матрицы Гессе).

Задача 4. Исследуйте особенности типичных однопараметрических семейств кривых на плоскости. Покажите, что при типичном значении параметра семейства кривая гладкая и имеет только точки трансверсального самопересечения. Возможные "катастрофы" при исключительных значениях параметра изображены на рис. 2. При каждом значении параметра происходит не более одной катастрофы.

Что почитать на ночь ...

Доказательство теоремы Тома, приведенное в тексте, представляет собой "сухой осадок" того, что написано по этому поводу в книге Громова [7]. См. также первый том [3]. По поводу типичных особенностей семейств отображений существует целая наука — теория особенностей — с которой можно познакомиться по [3].

5 Принцип Смейла–Хирша

5.1 Доказательство принципа Смейла–Хирша

Предметом этой лекции будет классификация погружений многообразий в $\mathbb{R}^n$. Напомним, что гладкое отображение многообразий $f : M \to N$ (размерностей m и $n \geq m$ соответственно) называется *погружением*, если ранг его дифференциала $Df(x) : T_xM \to T_{f(x)}N$ равен m (т.е., максимален) в каждой точке $x \in M$. Например, погружения S^1 в $\mathbb{R}^n$ это гладкие замкнутые кривые в $\mathbb{R}^n$. При $m = n$ погружения это локальные диффеоморфизмы. При $m < n$ погружений, разумеется, не бывает.

В некоторых случаях классификацию погружений можно осуществить с помощью теоремы Тома о трансверсальности. Рассмотрим, например, погружения $f_0, f_1 : S^1 \to \mathbb{R}^n$ (т.е., две гладкие кривые). Соединим f_0 и f_1 однопараметрическим семейством гладких отображений f_t. Из теории, изложенной в предыдущей лекции, следует, что при $n \geq 3$ все отображения f_t будут погружениями. Поэтому множество гладких кривых в $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 3$ связно. То же самое рассуждение доказывает связность множества погружений $M \to N$ при $n \geq 2m + 1$. При $m \leq n \leq 2m$, однако, эти соображения неприменимы, и множество погружений действительно может оказаться несвязным. Например, мы убедимся вскоре, что множество гладких кривых на плоскости имеет счетное число компонент связности.

Вначале — несколько вспомогательных фактов. Подмножество S многообразия M называется *стратифицированным*, если задано его разбиение $S = S_0 \cup \ldots \cup S_p$, где все S_i — локально замкнутые подмногообразия N, и граница $\partial S_i = (\overline{S_i} \cap S) \setminus S_i$ содержится в объединении S_j с номерами $j > i$. Многообразия S_i называются *стратами*. Скажем, для буквы "T" на плоскости возможная стратификация — ножка (S_0), перекладина (S_1, именно в этом порядке !), и три конца (S_2). Другая возможность — ножка плюс перекладина с выброшенной серединой (S_0), и середина перекладины плюс три конца (S_1).

Типичный пример стратифицированного множества — множество S решений системы гладких уравнений $u_1(x) = \ldots = u_k(x) = 0$ в $\mathbb{R}^m$. Назовем *регулярной частью* произвольного множества T наибольшее по включению подмножество T, являющееся локально замкнутым гладким подмногообразием. Возьмем в качестве страта S_0 регулярную часть S, страта S_1 — регулярную часть $S \setminus S_0$, и т.д. Нетривиальное утверждение состоит в том, что процесс оборвется; доказывать этого мы не будем (и пользоваться этим фактом тоже). Разумеется, эта (каноническая) стратификация множества S не является единственной.

Еще одно напоминание. Пусть A — топологическое пространство, и $B \subset A$. Множество B называется *деформационным ретрактом* пространства A, если существует семейство непрерывных отображений $f_t : A \to A$ таких, что $f_0 = \mathrm{Id}$, $f_t|_B \equiv \mathrm{Id}$ и $f_1(A) \subset B$. Множество и его деформационный ретракт гомотопически эквивалентны.

Пусть теперь $S \subset M$ — стратифицированное множество, а $L(x)$ — поле прямых на M, которое при $x \in S_i$ не касается S_i (если страт S_i нульмерен, то это условие считается всегда выполненным). Обозначим Φ множество 1-форм ν на M, которые при $x \in S$ не равны нулю на прямой $L(x)$, а через Φ_0 обозначим множество *точных* 1-форм с тем же свойством.

Предложение 14 *Φ_0 — деформационный ретракт Φ.*

Доказательство. Выберем в каждой прямой $L(x)$ по ненулевому вектору. Тем самым получится ненулевое векторное поле, которое мы тоже обозначим $L(x)$. Доказательство будем вести индукцией по *убыванию* номера страта. Страт с максимальным номером нульмерен (если нульмерного страта нет, его можно всегда добавить искусственно), и для него доказывать нечего. Возьмем теперь страт S_k, и пусть $\nu \in \Phi$. Нам нужно прогомотопировать форму ν в точную 1-форму для $x \in S_k$, оставаясь внутри множества Φ. Мы сделаем это даже для всех x из достаточно малой окрестности S_k. По предположению индукции мы можем считать, что вблизи *границы* страта S_k форма ν уже точна: $\nu = df_{k+1}$, где функция f_{k+1} определена в окрестности стратов S_i с $i > k$.

Продолжим функцию f_{k+1} произвольным образом на страт S_k. Из теоремы существования и единственности для обыкновенного дифференциального уравнения и из того факта, что векторное поле L нигде не касается S_k, получим, что в некоторой окрестности U страта S_k существует функция f_k такая, что $f_k = f_{k+1}$ и $\langle \nu, L\rangle = L(f_k) = \langle df_k, L\rangle$ на S_k. Теперь определим в окрестности U гомотопию форм формулой $\nu_t(x) = t df_k(x) + (1-t)\nu(x)$. Очевидно, $\nu_t \in \Phi$, поскольку $\langle \nu_t, L\rangle$ от t не зависит, и поэтому в нуль не обращается. Таким образом, шаг за шагом, мы построим требуемую ретракцию. ■

Пусть $n > m$. Обозначим Φ множество наборов $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ 1-форм на многообразии M таких, что в каждой точке $x \in M$ их значения $\nu_1(x), \ldots, \nu_n(x)$ порождают пространство $T_x^* M$.

Теорема 6 (Гомотопический принцип Смейла–Хирша) *Подмножество $\Phi_0 \subset \Phi$, состоящее из тех наборов, в которых все формы ν_i — точные, является деформационным ретрактом Φ.*

Прежде чем доказывать эту теорему, проинтерпретируем ее на языке расслоений струй. Каждому отображению $f = (f_1, \ldots, f_n) : M \to \mathbb{R}^n$ соответствует сечение $\varphi_f(x) = (x, f(x))$ тривиального расслоения $X = M \times \mathbb{R}^n \to M$. Соответствующее расслоение 1-струй есть $X^{(1)} = \mathbb{R}^n \times (T^*M)^n \to M$, а оператор $J_1\varphi_f(x) = (f(x), df_1(x), \ldots, df_n(x))$. Определим подрасслоение $A \subset X^{(1)}$, слой которого над точкой $x \in M$ выделяется условием, что соответствующие n ковекторов (элементы T_x^*M) порождают все T_x^*M. Легко видеть, что Φ гомотопически эквивалентно пространству сечений расслоения A, а Φ_0 — пространству *голономных* сечений этого расслоения, т.е., сечений вида $J_1\varphi_f$. Теоремы подобного типа ("пространство голономных сечений является деформационным ретрактом пространства всех сечений") носят название *гомотопических принципов* (для соответствующих расслоений), или, короче, h-принципов. Кроме того, обратим внимание на то, что $J_1\varphi_f$ — сечение расслоения A тогда и только тогда, когда $f : M \to \mathbb{R}^n$ — погружение. Тем самым, принцип Смейла–Хирша сводит задачу классификации погружений к задаче классификации сечений некоторого расслоения (расслоения A).

Для того, чтобы доказать принцип Смейла–Хирша, нам нужно произвольный набор 1-форм $(\nu_1, \dots, \nu_n) \in \Phi$ прогомотопировать к набору точных форм. Мы будем это делать покомпонентно. Пусть при $i < k$ формы уже точные: $\varphi_i = df_i$. Рассмотрим множество S тех точек $x \in M$, при которых линейная оболочка $m-1$ ковектора $\nu_i(x)$, $i \neq k$ не совпадает со всем пространством T_x^*M. Эту линейную оболочку мы обозначим $\mathcal{T}_x$. Коразмерность $\mathcal{T}_x \subset T_x^*M$ равна 1, поскольку, по условию, T_x^*M есть линейная оболочка $\mathcal{T}_x$ и ковектора $\nu_k(x)$. Поэтому аннулятор $\mathcal{T}_x^\perp \subset T_xM$ одномерен. Таким образом, мы задали на $S \subset M$ поле прямых.

Лемма 3 *Для набора форм $(\nu_1, \dots, \nu_n) \in \Phi$ общего положения множество S допускает такую стратификацию, что поле $\mathcal{T}_x^\perp$ не касается ни одного из стратов.*

Эта лемма является следствием теоремы Тома об эквисингулярной стратификации. Доказывать эту теорему, а также саму лемму, мы не будем, а лишь проиллюстрируем ее. Действительно, пусть, например, множество $S \subset M$ представляет собой линию, и прямые $\mathcal{T}_x^\perp$ в отдельных точках $x \in S$ касаются ее. Тогда мы просто объявим эти точки 1-стратом, а все остальные точки S — 0-стратом. Так поступить, конечно, не удастся, например, если $\mathcal{T}_x^\perp$ касается S на целом отрезке (число стратов должно быть конечно !). Лемма 3 утверждает, что для наборов форм общего положения такие ситуации не встречаются.

Теперь, если Лемма 3 известна, то теорема Смейла–Хирша сразу следует из Утверждения 14. Действительно, пусть задан набор форм $(\nu_1, \dots, \nu_n) \in \Phi$. Малым шевелением, если понадобится, мы приведем его в общее положение, причем мы сможем это сделать так, что формы ν_i при $i < k$ останутся точными. Теперь существование гомотопии, приводящей форму ν_k к точной, следует из Утверждения 14, примененного к множеству S и полю прямых $\mathcal{T}_x^\perp$. Теорема доказана.

5.2 Теорема Смейла

Мы используем принцип Смейла–Хирша для гомотопической классификации погружений $S^m \to \mathbb{R}^n$. Сначала рассмотрим случай $n = 2$, $m = 1$, т.е., гладких кривых на плоскости. Здесь $X^{(1)} = \mathbb{R}^2 \times (T^*S^1)^2$. Расслоение T^*S^1 тривиально (это следует из наличия на окружности глобальной координаты φ), поэтому $X^{(1)}$ — тоже тривиальное расслоение над S^1 со слоем $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Слой расслоения A состоит из пар векторов $(u, v) \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, для которых $v \neq 0$. Тем самым, множество сечений расслоения A гомотопически эквивалентно множеству отображений $S^1 \to \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. Последнее есть просто $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Тем самым, мы видим, что гладкие кривые на плоскости классифицируются единственным целочисленным инвариантом. Нетрудно убедиться, что этот инвариант — *индекс Уитни* — есть число оборотов, которые единичный вектор касательной к кривой делает вокруг начала координат, пока точка обходит кривую.

Пусть кривая f — общего положения, т.е., имеет только конечное число точек трансверсального самопересечения. Выберем на кривой начальную точку 0 (в которой самопересечения не происходит). Тогда все остальные точки кривой будут линейно упорядочены. Каждой точке самопересечения $x \in S^1$ сопоставим пару единичных касательных векторов $(n_1(x), n_2(x))$ к двум ветвям кривой, пересекающимся в этой точке, причем $n_1(x)$ соответствует той ветви, которая проходится раньше. Припишем точке самопересечения число $a(x) = \pm 1$ в зависимости от того, является ли ориентация пары векторов $(n_1(x), n_2(x))$ правой или левой. Считая, что $f(0)$ — начало координат, обозначим $\deg(f)$ число оборотов, которое делает *радиус-вектор*, пока точка обходит кривую. Нетрудно видеть, что число $\deg(f)$ — полуцелое.

Задача 5. Докажите формулу Уитни: индекс кривой f равен $2\deg(f) + \sum_x a(x)$ (сумма берется по всем точкам самопересечения). Пользуясь описанием типичных однопараметрических семейств кривых (данным в предыдущей лекции), проверьте независимо, что правая часть формулы Уитни не зависит от выбора точки 0 и не меняется при гомотопии гладкой кривой. Докажите теперь теорему Уитни непосредственно: если правые части формулы Уитни для двух кривых совпадают, то кривые гомотопны. Найдите минимально возможное число точек самопересечения у кривой общего положения индекса k.

Перейдем теперь к рассмотрению многомерного случая. Здесь слой расслоения A над точкой $x \in S^m$ состоит (с точностью до сомножителя $\mathbb{R}^n$, т.е., до гомотопической эквивалентности) из наборов из n ковекторов, порождающих в совокупности m-мерное пространство $T^*_x S^m$. Введя в $T^*_x S^m$ систему координат, и собрав координаты всех n ковекторов вместе, получим матрицу $m \times n$ ранга m. Рассматривая теперь ее столбцы вместо строк, увидим, что эту матрицу можно интерпретировать как m линейно независимых векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$, т.е., как элемент многообразия Штифеля $St(m,n)$. Тем самым погружения $S^m \to \mathbb{R}^n$ классифицируются так же, как сечения некоторого расслоения над S^m со слоем $F = St(m,n)$.

Пусть теперь дано некоторое расслоение A над S^m со слоем F. На сфере S^m зафиксируем начальную точку a. Умножим S^m на отрезок $[0,1]$, и соединим точки $a \times 0$ и $a \times 1$ отрезком. Рассмотрим отображение $m+1$-мерного диска $h : D^{m+1} \to S^m \times [0,1]$, устройство которого показано на рис. 3. Мы можем продолжить “послойно” расслоение A на $S^m \times [0,1]$, тогда над D^{m+1} возникнет индуцированное расслоение h^*A со слоем F. Возьмем два сечения f_0 и f_1 исходного расслоения (над S^m). Предполагая, что слой

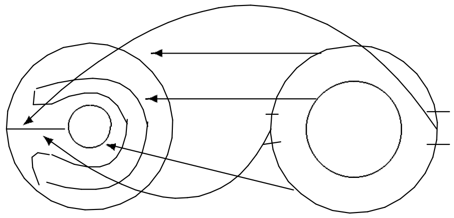


Рис. 3: Характеристическое отображение

F линейно связен, мы можем построить сечение над отрезком $a \times [0,1]$, которое в $a \times 0$ совпадает с $f_0(a)$, а в $a \times 1$ — с $f_1(a)$. Тем самым мы построили сечение расслоения h^*A, определенное, однако, пока не над всем диском D^{m+1}, а только над его границей S^m. Нетрудно убедиться, что возможность продолжить это сечение на весь диск в точности соответствует гомотопности сечений f_0 и f_1 исходного расслоения.

Расслоение h^*A, как и любое расслоение над диском, тривиально, т.е., равно $D^{m+1} \times F$. Поэтому сечение, определенное над граничной сферой, это просто отображение этой сферы в F, т.е., элемент $\pi_m(F)$. Ясно, что сечение продолжается внутрь диска тогда и только тогда, когда это элемент равен нулю. Тем самым, получено взаимно однозначное соответствие компонент связности множества сечений и элементов группы $\pi_m(F)$ (строго говоря, нужно еще убедиться, что всякий элемент $\pi_m(F)$ можно так получить — убедитесь !). В применении к "расслоению погружений" A получается

Теорема 7 (Теорема Смейла) *Погружения $S^m \to \mathbb{R}^n$ классифицируются элементами гомотопической группы $\pi_m(St(m,n))$.*

Действительно, чтобы применить к "расслоению погружений" предыдущие рассуждения, нужно убедиться, во-первых, что его слой $St(m,n)$ связен, и во-вторых, что оно имеет сечение. Первый факт легко проверить непосредственно, а второе утверждение следует из того, что существует погружение (на самом деле даже вложение) $S^m \to \mathbb{R}^{m+1}$, а в пространства большей размерности и подавно.

Что почитать на ночь ...

Доказательство принципа Смейла–Хирша заимствовано из книги Громова [7]. Рассуждение, доказывающее теорему Смейла, представляет собой основное рассуждение теории препятствий. С этой теорией можно познакомиться по зеленой книжке Фукса и Фоменко [15].

6 Классификация погружений

Посмотрим, что дает теорема Смейла в конкретных небольших размерностях. Для этого нужно научиться вычислять $\pi_m(St(m,n))$. Заметим прежде всего, что $St(m,n)$ гомотопически эквивалентно многообразию *ортонормированных* наборов из m векторов в $\mathbb{R}^n$ (гомотопическая эквивалентность определяется процессом ортогонализации Грама–Шмидта); это многообразие мы в дальнейшем тоже будем обозначать $St(m,n)$.

6.1 $S^2 \to \mathbb{R}^3$

По теореме Смейла погружения $S^2 \to \mathbb{R}^3$ нумеруются элементами группы $\pi_2(St(2,3))$. Пару ортонормированных векторов в $\mathbb{R}^3$ можно единственным образом дополнить до правого ортонормированного базиса. Поэтому, с точностью до двулистного накрытия (нам нужно знать, какой вектор первый, а какой второй), многообразие $St(2,3)$ диффеоморфно группе $\mathrm{SO}(3)$. Мы будем часто производить рассуждения "с точностью до накрытия", поскольку накрытия не меняют гомотопических групп, кроме π_1.

Хорошо известна

Лемма 4 $\mathrm{SO}(3) \sim \mathbb{R}P^3$.

Существуют десятки способов доказывать эту лемму. Приведем наиболее "идейное" доказательство.

Доказательство. В алгебре кватернионов $\mathbb{H}$ (которая топологически есть $\mathbb{R}^4$) действует инволюция $a \mapsto \overline{a}$, сохраняющая вещественную часть неизменной и меняющая знак коэффициентов при i, j и k. Легко проверить, что эта инволюция — антигомоморфизм: $\overline{ab} = \overline{b}\,\overline{a}$. Стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^4$ выражается формулой: $(a,b) = \mathrm{Re}\, a\overline{b} = \mathrm{Re}\, \overline{a}b$. Кроме того, $a\overline{a} = \overline{a}a \in \mathbb{R}_+$ — квадрат модуля кватерниона a.

Уравнение $a\overline{a} = 1$ задает трехмерную сферу S^3. Эта сфера является мультипликативной подгруппой G группы ненулевых кватернионов по умножению. Действительно, если $a, b \in S^3$, то $ab\overline{ab} = ab\overline{b}\,\overline{a} = 1$. На самом деле группа G изоморфна $\mathrm{SU}(2)$ — убедитесь ! — но этот факт нам не понадобится.

Кватернионы с нулевой вещественной частью задаются условием $\overline{x} = -x$. Они образуют трехмерное пространство. Группа G действует в этом пространстве сопряжениями: $x \mapsto ax\overline{a}$. Действительно, $\overline{ax\overline{a}} = a\overline{x}\,\overline{a} = -ax\overline{a}$, т.е., чисто мнимый кватернион остается чисто мнимым, и, кроме того, сопряжение произведением ab есть произведение сопряжений (т.е., это на самом деле действие группы. На самом деле это просто присоединенное действие G на ее алгебре Ли). Это действие сохраняет скалярное произведение: $\mathrm{Re}(ax\overline{a}a\overline{y}\,\overline{a}) = \mathrm{Re}(ax\overline{ay}) = \mathrm{Re}(\overline{ay}ax) = \mathrm{Re}(\overline{y}\,\overline{a}ax) = \mathrm{Re}(\overline{y}x)$. Тем самым, построен гомоморфизм $\alpha : G \to \mathrm{O}(3)$.

Определим его образ. Пусть g — точка границы образа. Так как G компактно, образ замкнут, и $g = \alpha(s)$ для некоторого $s \in G$. Но отображение α является локальным диффеоморфизмом (размерности групп G и $\mathrm{O}(3)$ совпадают — равны 3) — в точке s получается противоречие с теоремой о неявной функции. Поэтому граница пуста, и образ α — одна из связных компонент группы $\mathrm{O}(3)$ (одна, потому что G связна). Но α — гомоморфизм, поэтому образ должен содержать единицу, т.е., совпадать с $\mathrm{SO}(3)$.

Ядро α состоит из кватернионов a, коммутирующих с любым чисто мнимым кватернионом. Нетрудно видеть, что это происходит только при $a \in \mathbb{R}$. А поскольку $a\overline{a} = 1$, то $\operatorname{Ker}\alpha = \{1, -1\}$. Следовательно, топологически α представляет собой двулистное накрытие $S^3 \to \mathrm{SO}(3)$. Отсюда следует утверждение леммы. ■

Теперь получаем: $\pi_2(St(2,3)) = \pi_2(\mathbb{R}P^3) = \pi_2(S^3) = 0$. Таким образом, *любые два погружения S^2 в $\mathbb{R}^3$ гомотопны.* В частности, это относится к двум вложениям: стандартному и к его композиции с центральной симметрией с центром в начале координат. Таким образом, сферу можно непрерывным образом "вывернуть наизнанку" в трехмерном пространстве, оставаясь все время в классе погружений. Это — знаменитый парадокс Смейла.

Задача 6. Опишите множество точек самопересечения при типичном погружении $S^2 \to \mathbb{R}^3$. Опишите перестройки этого множества при типичной гомотопии погружений. Укажите последовательность перестроек, соответствующую выворачиванию сферы наизнанку.

6.2 $S^3 \to \mathbb{R}^4$

Сделаем одно общее замечание. Возьмем ортонормированный набор из m векторов в $\mathbb{R}^n$, и выделим один вектор. Это соответствует переходу от $St(m,n)$ к m-листному его накрытию, что не влияет на нужную нам гомотопическую группу. Выделенный вектор набора пробегает сферу S^{n-1}. Если он выбран, остальные $m-1$ составляют элемент многообразия Штифеля в $(n-1)$-мерном пространстве, ортогональном вектору, т.е., касательном к S^{n-1} в соответствующей точке. Значит, $St(m,n)$ расслоено над S^{n-1} со слоем $St(m-1,n-1)$, причем расслоение *ассоциировано* с касательным расслоением $TS^{n-1} \to S^{n-1}$. Наглядный смысл слова "ассоциировано" ясен из предыдущих рассуждений, а формально это означает следующее. Группа GL_{n-1} естественным образом действует на $St(m-1,n-1)$. Функции перехода касательного расслоения TS^{n-1} принимают значения в $\mathrm{GL_{n-1}}$. Тогда слово "ассоциировано" означает, что функции перехода расслоения $St(m,n) \to S^{n-1}$ *точно такие же*, как и у касательного расслоения, но элемент группы $\mathrm{GL_{n-1}}$ действует не в слое $\mathbb{R}^{n-1}$ расслоения TS^{n-1}, а в слое $St(m-1,n-1)$ описанного расслоения.

Это замечание особенно полезно при изучении погружений сфер в $\mathbb{R}^4$, благодаря следующему факту (называемому *параллелизуемостью* сферы S^3):

Предложение 15 *Расслоение $TS^3 \to S^3$ тривиально.*

Доказательство. Рассмотрим опять $\mathbb{R}^4$ как алгебру кватернионов $\mathbb{H}$ со скалярным произведением $\big(a,b\big) = \mathrm{Re}\, a\overline{b}$. Сфера S^3 задается условием $a\overline{a} = 1$. Нетрудно проверить, что $b \in T_aS^3$, т.е., $(a,b) = 0$, тогда и только тогда, когда $b = \kappa a$, где κ — чисто мнимый кватернион ($\overline{\kappa} = -\kappa$). Соответствие $b \mapsto \kappa$ является взаимно однозначным ($\mathbb{H}$ — алгебра с делением) и задает глобальную тривиализацию TS^3 (пространство чисто мнимых кватернионов трехмерно). ■

Замечание Таким же образом доказывается, что касательное расслоение к любой группе Ли тривиально (S^3 — группа Ли, согласно лемме 4). Более того, тем же способом доказывается тривиальность касательного расслоения к семимерной сфере: нужно вложить $S^7 \to \mathbb{R}^8$, а $\mathbb{R}^8$ представить как алгебру октав Кэли. Однако отсюда не следует, что S^7 — группа Ли, потому что октавы неассоциативны.

Рассмотрим теперь погружения $S^3 \to \mathbb{R}^4$. Из предыдущих рассуждений следует, что с точностью до накрытия $St(3,4) = S^3 \times St(2,3) = S^3 \times \mathbb{R}P^3$, и поэтому $\pi_3(St(3,4)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Таким образом, у погружений $S^3 \to \mathbb{R}^4$ есть два целочисленных инварианта.

Пусть $f : S^3 \to \mathbb{R}^4$ — погружение. Для каждой точки $x \in S^3$ рассмотрим образ $D_xf(T_xS^3)$. Это — ориентированное трехмерное подпространство в $\mathbb{R}^4$, т.е., элемент $G_+(3,4)$. Таким образом, сопоставляя точке x указанный образ, мы получим отображение $G_f : S^3 \to G_+(3,4)$, т.е., $S^3 \to S^3$ (т.наз. гауссово отображение).

Задача 7. Выразите гомотопический класс (т.е., степень) гауссова отображения через инварианты погружения f.

6.3 $S^2 \to \mathbb{R}^4$

Аналогично предыдущему пункту получим, что $St(2,4)$, с точностью до двулистного накрытия, есть $S^3 \times St(1,3) = S^3 \times S^2$. Следовательно, $\pi_2(St(2,4)) = \mathbb{Z}$. По теореме Смейла погружения $S^2 \to \mathbb{R}^4$ классифицируются одним целочисленным инвариантом — индексом.

Задача 8. Опишите этот инвариант в явном виде и постройте пример погружения с заданным значением индекса. Как мы знаем, погружение

$S^2 \to \mathbb{R}^4$ общего положения имеет конечное число точек трансверсального самопересечения. Оцените количество точек самопересечения у погружения индекса k.

Погружение $f : S^2 \to \mathbb{R}^4$ определяет в каждой точке x отображение $D_x f : T_x S^2 \to \mathbb{R}^4$, образ которого двумерен. Тем самым, каждому погружению соответствует элемент группы $\pi_2(G_+(2,4))$. Гомотопным погружениям соответствует один и тот же элемент.

Лемма 5 $G_+(2,4) = S^2 \times S^2$.

Идея доказательства. Двумерное ориентированное подпространство в $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ можно задать ортонормированным базисом, т.е., парой кватернионов a, b, для которых $a\overline{a} = b\overline{b} = 1$ и $\mathrm{Re}\, a\overline{b} = \mathrm{Re}\, \overline{a}b = 0$. Тем самым, кватернионы $a\overline{b}$ и $\overline{a}b$ — чисто мнимые. Кроме того, они единичной длины: $a\overline{b}\overline{a\overline{b}} = a\overline{b}b\overline{a} = 1$. Следовательно, это элементы сферы S^2. Осталось доказать, что $a\overline{b}$ и $\overline{a}b$ определяют a и b однозначно с точностью до замены $(a,b) \mapsto (\alpha a + \beta b, -\beta a + \alpha b)$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, т.е., ровно с той же точностью, с какой определен ортонормированный базис данного ориентированного двумерного подпространства. ■

Поэтому $\pi_2(G_+(2,4)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Задача 9. Вычислите элемент $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, соответствующий погружению индекса k.

В заключение — две задачи про погружения других многообразий.

Задача 10. Найдите гомотопические инварианты погружений $M_g \to \mathbb{R}^3$, где M_g — сфера с g ручками.

Ответ: Существует 4^g различных классов погружений. Они нумеруются элементами группы гомологий $H_1(M_g, \pi_1(St(2,3))) = H_1(M_g, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^{2g}$.

Напомним, что h-принцип Смейла–Хирша верен для погружений произвольных многообразий в евклидовы пространства, и поэтому решение задачи 10 сводится к классификации сечений некоторого расслоения (но теорема Смейла верна только для сфер). В следующей задаче принцип Смейла–Хирша уже неприменим:

Задача 11. Найдите гомотопические инварианты погружений окружности в произвольную двумерную поверхность.

Что почитать на ночь ...

Выворачивание сферы наизнанку в классе погружений нарисовано в книге Фукса и Фоменко [15]. Утверждение задачи 10 можно получить средствами теории препятствий — см. ту же книгу. Решение задачи 11 (и ряд более тонких результатов про кривые на поверхностях) недавно получено А.Иншаковым.

7 Интегрируемость распределений

7.1 Постановка задачи

Эта лекция посвящена одному далеко идущему обобщению теоремы существования и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения. Эту теорему можно сформулировать так: пусть в на n-мерном многообразии M задано (достаточно гладкое) поле направлений $\mathcal{D}$, т.е., в каждой точке $x \in M$ задано одномерное линейное подпространство (прямая, проходящая через начало координат) $\mathcal{D}(x) \subset T_xM$. Тогда через x можно провести кривую γ, в каждой своей точке $y \in \gamma$ касающуюся прямой $\mathcal{D}(y)$. Любые две таких кривых, проведенных через точку x, совпадают в некоторой окрестности точки x.

Естественно вместо полей направлений рассматривать поля подпространств размерности $k > 1$ — так называемые *распределения.* Пусть в M задано такое распределение $\mathcal{D}$, и $x \in M$. Существует ли k-мерное подмногообразие $N \subset M$, проходящее через x и такое, что в каждой точке $y \in N$ подпространство $T_yN = \mathcal{D}(y)$? Легко видеть, что в общем случае это не так. Например, рассмотрим распределение двумерных плоскостей в $M = \mathbb{R}^3$, в котором через точку с координатами (a, b, c) проходит плоскость, заданная уравнением:

$$(x - a) + c(x - b) + ab(x - c) = 0.$$

Убедимся, что не существует двумерных поверхностей, касающихся этого распределения. Действительно, если такие поверхности существуют, то они должны быть, по крайней мере локально, поверхностями уровня некоторой гладкой функции $f(a, b, c)$. Градиент функции f перпендикулярен ее поверхности уровня, и поэтому в точке с координатами (a, b, c) он пропорционален направляющему вектору плоскости, проходящей через (a, b, c), т.е., вектору с координатами $(1, c, ab)$. Таким образом должна существовать (хотя бы локально) не равная нулю функция $\varphi(a, b, c)$ (коэффициент пропорциональности) такая, что

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \varphi, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = c\varphi, \quad \frac{\partial f}{\partial c} = ab\varphi.$$

Поскольку функция f гладкая, ее смешанные частные производные не зависят от порядка дифференцирований, откуда

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial b} &= c\frac{\partial \varphi}{\partial a}, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial c} &= b\varphi + ab\frac{\partial \varphi}{\partial a}, \\
\varphi + c\frac{\partial \varphi}{\partial c} &= a\varphi + ab\frac{\partial \varphi}{\partial b}.
\end{aligned}$$

Из второго уравнения следует, что $c\frac{\partial\varphi}{\partial c} = bc\varphi + abc\frac{\partial\varphi}{\partial a}$, а из первого и третьего — что $c\frac{\partial\varphi}{\partial c} = (a-1)\varphi + abc\frac{\partial\varphi}{\partial a}$, поэтому $(a-1-bc)\varphi = 0$ и $\varphi \equiv 0$ (равенства должны ведь выполняться при произвольных значениях независимых переменных a, b, c !).

Определение. Распределение k-мерных подпространств $\mathcal{D}(x) \subset T_xM$ называется *интегрируемым*, если для каждой точки $a \in M$ существует k-мерное подмногообразие $N \subset M$, проходящее через a и касающееся в каждой своей точке соответствующего подпространства распределения. Подмногообразия N называются *интегральными*.

Ситуация с интегрируемыми и неинтегрируемыми распределениями напоминает ситуацию с голономными и неголономными сечениями расслоения струй, описанную в лекции 2. Однако k-мерные подмногообразия многообразия M нельзя представить как сечения какого-то расслоения. Чтобы уяснить связь между интегрируемостью и голономностью, обратимся к очень важному математическому понятию — понятию *пучка*.

"Базовый" пример пучка на многообразии M — множество сечений некоторого расслоения $S \to M$ (например, множество функций на M). Говорят, что на многообразии M задан пучок $\mathcal{F}$ (множеств), если для каждого открытого множества $U \subset M$ задано множество $\mathcal{F}(U)$ (в базовом примере это множество сечений расслоения S над подмножеством $U \subset M$), и для каждой пары открытых множеств $V \subset U$ задано *отображение ограничения* $\varrho_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ (в базовом примере это — ограничение сечения над U на меньшую область определения $V \subset U$), обладающее следующими свойствами:

1. $\varrho_{UU} = \mathrm{id}$;
2. Если $W \subset V \subset U$, то $\varrho_{UW} = \varrho_{VW} \circ \varrho_{UV}$;
3. Если заданы элементы $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ (U_i — некоторый набор открытых множеств) такие, что для любых i, j $\varrho_{U_i, U_i \cap U_j}(f_i) = \varrho_{U_j, U_i \cap U_j}(f_j)$ (т.е., согласованные на пересечениях), то существует и единствен элемент $f \in \mathcal{F}(\bigcup_j U_j)$ такой, что для любого i $f_i = \varrho_{\bigcup_j U_j, U_i}(f)$.

Скажем, функции на многообразии образуют пучок. Также образуют пучок сечения любого расслоения на многообразии, например, k-формы. Замкнутые k-формы это тоже пучок, а вот точные — нет, из-за нарушения условия 3 (рассмотрите окружность, две ее пересекающихся дуги, объединение которых есть вся окружность, и на каждой дуге — замкнутую 1-форму $d\varphi$). Часто рассматривают пучки, в которых множества $\mathcal{F}(U)$ наделены дополнительной структурой (являются объектами некоторой категории), а отображения ограничения эту структуру сохраняют (являются морфизмами той же категории). Например, можно требовать (и у нас это будет так), чтобы $\mathcal{F}(U)$ было топологическим пространством, а отображение ограничения было непрерывным; или же чтобы $\mathcal{F}(U)$ было группой (кольцом, алгеброй и т.д.), а отображение ограничения — гомоморфизмом.

Возьмем теперь точку $a \in M$, и назовем два сечения пучка $f \in \mathcal{F}(U)$ и $g \in \mathcal{F}(V)$ эквивалентными в точке a, если они совпадают в некоторой ее окрестности $W \subset U \cap V$ (т.е., $\varrho_{UW}(f) = \varrho_{VW}(g)$); из свойства 2 следует, что это действительно отношение эквивалентности. Множество классов эквивалентности (в точке a) называется *ростком* $\mathcal{F}_a$ пучка $\mathcal{F}$. Таким образом, всякий пучок определяет "расслоение", слоем которого над a является росток $\mathcal{F}_a$. Всякое сечение пучка над множеством $U \ni a$ определяет очевидным образом локальное сечение "расслоения ростков". Сечения "расслоения ростков", получающиеся такой конструкцией, называются (локально) голономными (или интегрируемыми).

Росток это очень большой объект. Например, для пучка функций росток содержит информацию обо всех производных функции, и даже более того. Поэтому рассматривают факторрасслоения "расслоения ростков" (т.е., забывают часть информации о ростке). Сечения таких "расслоений", получающиеся из голономных сечений "расслоения ростков", тоже называют голономными. Скажем, для пучка гладких сечений гладкого расслоения $S \to M$ для каждого ростка определена его r-струя; поэтому можно рассматривать расслоение r-струй (на этот раз без кавычек, это действительно локально тривиальное расслоение с базой M) и его голономные и неголономные сечения. Если мы интересуемся локальной голономностью, то мы можем считать исходное расслоение тривиальным: $S = M \times N$. Тогда расслоение r-струй также тривиально: $S^{(r)} = M \times N \times \mathbb{R}^{nd(m,r)}$. Если заданы координаты $x_1, \ldots, x_m$ на базе M и $y_1, \ldots, y_n$ в слое N исходного расслоения, то в слое расслоения $S^{(r)}$ есть стандартные координаты $\xi^i = y_i, \xi^i_j, \xi^i_{j_1 j_2}, \ldots, \xi^i_{j_1 \ldots j_r}$, где i изменяется от 1 до n, а все j_s — от 1 до m. Если координата y_i сечения f исходного расслоения равна f_i, то координата $\xi^i_{j_1 \ldots j_s}$ его r-струи есть $\frac{\partial^s f_i}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s}}$. Ясно, что необходимое и достаточное условие локальной голономности состоит в том, что $\frac{\partial \xi^i_{j_1 \ldots j_s}}{\partial j_{s+1}} = \xi^i_{j_1 \ldots j_s j_{s+1}}$.

В случае с распределениями нужно рассмотреть пучок k-мерных подмногообразий: элементами множества $\mathcal{F}(U)$ будут *гладкие вложения* $\iota : N \to U$, где N — некоторое k-мерное многообразие (возможно, пустое). Ростку вложений $\mathcal{F}_a$ нужно сопоставить образ его дифференциала в точке a как элемент грассманова многообразия $G(T_a M, k)$. Это определяет некоторое расслоение над M. Его сечения это распределения k-мерных подпространств в TM, а локально голономные сечения — интегрируемые распределения. Обратите внимание, что интегрируемость это действительно локальное свойство, поскольку открытое подмножество интегрального многообразия является интегральным многообразием. Отдельный интерес представляет вопрос о максимальных по включению интегральных многообразиях.

7.2 Теорема Фробениуса

Перейдем к формулировке необходимых и достаточных условий интегрируемости распределения. Для этого нужно каким-то образом задать k-мерное подпространство $\mathcal{D}(x) \in T_x M$. Один из способов сделать это — задать в нем базис $Y_1(x), \ldots, Y_k(x)$, т.е., задать набор k векторных полей, порождающих в каждой точке $x \in M$ подпространство $\mathcal{D}(x)$. Это всегда можно сделать — по крайней мере, локально (все дальнейшие рассуждения производятся в некоторой окрестности U точки $a \in M$).

Теорема 8 *Распределение $\mathcal{D}$, порождаемое векторными полями $Y_1(x), \ldots, Y_k(x)$, тогда и только тогда является интегрируемым, когда для всех i, j коммутатор векторный полей*

$$[Y_i(x), Y_j(x)] \in \mathcal{D}(x). \tag{6}$$

Замечание Другой способ сформулировать то же самое: рассмотрим множество $\mathrm{Vect}(\mathcal{D})$ всех векторных полей, значения которых в каждой точке $x \in M$ принадлежат соответствующему подпространству $\mathcal{D}(x)$. Тогда распределение $\mathcal{D}$ интегрируемо тогда и только тогда, когда $\mathrm{Vect}(\mathcal{D})$ — алгебра Ли относительно операции коммутирования векторных полей, т.е., подалгебра алгебры Ли $\mathrm{Vect}(M)$. Для того, чтобы это проверить, нужно убедиться (это легко), что если условие (6) выполнено для базисных полей $Y_i(x)$, то оно выполнено и для произвольных полей $Y(x) \in \mathcal{D}(x)$.

Доказательство. Необходимость: проведем через точку $a \in M$ интегральное подмногообразие N. Поля Y_i в точках $x \in N$ касаются N, откуда следует, что интегральные траектории этих полей, проходящие через точку a, лежат в N. Поскольку коммутатор $[Y_i(a), Y_j(a)]$ определяется посредством этих траекторий, то он тоже касается N, т.е., принадлежит $\mathcal{D}(a)$.

Для доказательства достаточности покажем, что можно выбрать набор векторных полей $Z_1(x), \ldots, Z_k(x) \in \mathcal{D}(x)$, которые при $x \in U$ (напомним, что U — окрестность точки $a \in M$) порождают $\mathcal{D}(x)$ и находятся в инволюции: $[Z_i(x), Z_j(x)] = 0$. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — координаты на многообразии M, а $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ — соответствующие векторные поля на M. Эти поля, очевидно, находятся в инволюции. Пусть теперь $Y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Матрица $A = (\alpha_i^j)$ имеет размеры $n \times k$ и ранг k. Без ограничения общности можно предполагать, что ее самый левый минор размера $k \times k$ отличен от нуля. Пусть $K = (\kappa_i^j)$ — матрица $k \times k$, обратная к этому минору. Тогда поля $Z_i = \sum_{j=1}^{k} \kappa_i^j Y_i$ имеют вид

$$Z_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=k+1}^{n} \mu_i^j \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{7}$$

Очевидно, $Z_i(x)$ порождают $\mathcal{D}(x)$. В силу замечания перед доказательством коммутатор $[Z_i, Z_j]$ представляется в виде линейной комбинации Z_i:

$$[Z_i, Z_j] = \sum_{m=1}^{k} \lambda_{ij}^m Z_m = \sum_{m=1}^{k} \lambda_{ij}^m \frac{\partial}{\partial x_m} + \sum_{m=1}^{k} \sum_{s=k+1}^{n} \lambda_{ij}^m \mu_m^s \frac{\partial}{\partial x_s}. \tag{8}$$

Но из формулы (7) видно, что $[Z_i, Z_j]$ не содержит полей $\frac{\partial}{\partial x_m}$ при $1 \leq m \leq k$. Тогда формула (8) дает $\lambda_{ij}^m = 0$, т.е., поля Z_i находятся в инволюции.

Пусть теперь $z_i(t)(x)$ — поток векторного поля Z_i, т.е., отображение (определенное локально) $\mathbb{R} \times M \to M$, удовлетворяющее дифференциальному уравнению $\left.\frac{dz_i(t)(x)}{dt}\right|_{t=0} = Z_i(x)$. Определим интегральное многообразие N, проходящее через точку a, как вложение малой окрестности начала координат пространства $\mathbb{R}^k$, заданное формулой $\iota(t_1, \ldots, t_k) = (z_1(t_1) \circ \ldots \circ z_k(t_k))(a)$. Нетрудно проверить, что ι — действительно вложение, и что касательное пространство к его образу в точке x есть $\mathcal{D}(x)$ — для этого нужно лишь применить тот факт, что если поля находятся в инволюции, то их потоки коммутируют. ■

Существует другой способ задать k-мерное подпространство $\mathcal{D}(x) \subset T_x M$: можно задать $n-k$ линейно независимых функционалов, обнуляющих это пространство. Иными словами, распределение $\mathcal{D}$ можно задать (локально), указав 1-формы (ковекторные поля) $\nu_{k+1}, \ldots, \nu_n$, линейно независимые в каждой точке $x \in M$ и такие, что $\nu_{k+1}(Y) = \ldots = \nu_n(Y) = 0$ для любого векторного поля $Y \in \mathrm{Vect}(\mathcal{D})$. Теорему 8 можно переформулировать в терминах 1-форм ν_i следующим образом:

Теорема 9 *Распределение $\mathcal{D}$, порождаемое 1-формами $\nu_{k+1}, \ldots, \nu_n$, тогда и только тогда является интегрируемым, когда найдутся такие 1-формы α_i^j, что*

$$d\nu_i = \sum_{j=k+1}^{n} \nu_j \wedge \alpha_i^j. \tag{9}$$

Замечание Другой способ сформулировать то же самое: рассмотрим множество $\mathrm{Vect}^{\perp}(\mathcal{D})$ всех 1-форм, обнуляющих пространства $\mathcal{D}(x)$ при всех x. Тогда распределение $\mathcal{D}$ интегрируемо тогда и только тогда, когда дифференциалы форм из $\mathrm{Vect}^{\perp}(\mathcal{D})$ принадлежат идеалу, порожденному $\mathrm{Vect}^{\perp}(\mathcal{D})$ в кольце всех дифференциальных форм на M. В частности, если распределение порождается набором замкнутых форм, то оно интегрируемо. Для того, чтобы это проверить, нужно убедиться (это легко), что если дифференциалы базисных форм ν_i принадлежат этому идеалу (а это и есть условие 9), то то же самое верно и для произвольной формы $\nu \in \mathrm{Vect}^{\perp}(\mathcal{D})$.

Доказательство. Необходимость: пусть распределение интегрируемо. Проведем через точку $a \in M$ интегральное многообразие N. Ясно, что в окрестности точки a можно ввести координаты $x_1, \dots, x_n$ таким образом, чтобы многообразие N задавалось (локально) уравнениями $x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$. Тогда формы $\nu_{k+1} = dx_{k+1}, \dots, \nu_n = dx_n$ замкнуты (и поэтому удовлетворяют (9)) и порождают $\mathcal{D}(x)$.

Для доказательства достаточности рассмотрим два векторных поля $Y_1, Y_2 \in \mathrm{Vect}(\mathcal{D})$ и 1-форму $\nu \in \mathrm{Vect}^{\perp}(\mathcal{D})$. Имеем (по формуле Картана для внешнего дифференциала формы; $\mathcal{L}$ — производная Ли):

$$
\begin{aligned}
\nu([Y_1, Y_2]) &= \mathcal{L}_{Y_1}\nu(Y_2) - \mathcal{L}_{Y_2}\nu(Y_1) - d\nu(Y_1, Y_2) = \\
&= \mathcal{L}_{Y_1}\nu(Y_2) - \mathcal{L}_{Y_2}\nu(Y_1) - \sum_{j=k+1}^{n} \nu_j(Y_1) \wedge \alpha_i^j(Y_2) + \sum_{j=k+1}^{n} \nu_j(Y_2) \wedge \alpha_i^j(Y_1) = \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Поэтому $[Y_1, Y_2] \in \mathrm{Vect}(\mathcal{D})$. Таким образом, $\mathrm{Vect}(\mathcal{D})$ удовлетворяет условию теоремы 8 и поэтому распределение интегрируемо. ■

Интегрируемые распределения иногда называют *слоениями*. Если быть более точным, слоение это не само распределение, а набор его максимальных интегральных многообразий, то есть разбиение многообразия M на подмногообразия размерности k (называемые слоями слоения), локально устроенное как разбиение $\mathbb{R}^n$ на параллельные k-мерные подпространства. Скажем, если многообразие M является тотальным пространством некоторого расслоения, слой которого — k-мерное многообразие N, то это определяет в M k-мерное слоение, все слои которого диффеоморфны N. Пример слоения (одномерного), которое не получается с помощью этой конструкции — иррациональная обмотка тора. Вообще, слои слоения не обязаны быть диффеоморфны друг другу. Дальнейшие примеры слоений будут приведены в следующей лекции.

Что почитать на ночь ...

С теорией пучков можно познакомиться по книге Годемана [6]. Обычно теорией пучков пользуются в алгебраической геометрии, однако Громов в книге [7] тоже работает с пучками. Приведенное в тексте доказательство теоремы Фробениуса заимствовано из уже упоминавшейся книги Нарасимхана [12]. Вообще, в этой книге изложено много полезных вещей, и притом очень просто — посмотрите.

8 Слоения

Нашей задачей в этой лекции будет изучение различных ситуаций, в которых возникают слоения.

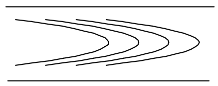


Рис. 4: Слоение Рееба

8.1 Примеры слоений

Два примера слоений — гладкие расслоения и обмотка тора — приводились в предыдущей лекции. Обмотка тора — частный случай следующей ситуации. Пусть группа Ли G гладко действует на многообразии M так, что если $gx = x$ для *каких-либо* $g \in G$ и $x \in M$, то $g = e$. Тогда каждая орбита этого действия, как многообразие, диффеоморфна G, и в M возникает слоение (все слои которого диффеоморфны). Например, для любой пары взаимно простых целых чисел k и l на трехмерной сфере, заданной в $\mathbb{C}^2$ уравнением $|z|^2 + |w|^2 = 1$, имеется такое действие окружности $S^1 = \{\varphi \bmod 2\pi\}$: $\varphi(z_1, z_2) = (z_1 e^{ki\varphi}, z_1 e^{li\varphi})$. Тем самым в S^3 задано семейство одномерных слоений.

Задача 12. Докажите, что при $k \neq l$ это слоение не является гладким расслоением (при $k = l(= \pm 1)$ это расслоение Хопфа). Докажите, что множество слоев этого слоения (орбит действия) гомеоморфно двумерному замкнутому многообразию. Найдите род (число ручек) этого многообразия.

Во всех предыдущих примерах все слои слоений (т.е., максимальные связные интегральные многообразия соответствующего распределения) были диффеоморфны друг другу. Приведем пример, показывающий, что это не всегда так. Эта конструкция называется *слоением Рееба* (Реба, Риба) на полнотории.

Рассмотри сначала слоение в полосе, приведенное на рис. 4. Его слои — "параболы" и две прямые. Вращая картинку вокруг горизонтальной оси, получим двумерное слоение в бесконечном цилиндре. Кстати, это уже пример слоения с недиффеоморфными слоями: один слой здесь — цилиндр, а все остальные диффеоморфны плоскости. Заметим теперь, что это слоение инвариантно относительно параллельных переносов вдоль оси цилиндра. Если отождествить точки цилиндра, отличающиеся параллельным переносом вдоль его оси на единичное расстояние, то получится полноторие. Указанная инвариантность построенного слоения позволяет перенести его на это полноторие. То, что получится, и называется слоением Рееба. Один из его слоев — граничный тор, а все остальные диффеоморфны плоскости. Теперь если склеить два полнотория так, чтобы образовалась трехмерная сфера, то получится двумерное слоение на S^3, у которого один слой диффеоморфен тору, а остальные — плоскости. Это — слоение Рееба на S^3.

Задача 13. Докажите, что для того, чтобы на связном компактном n-мерном многообразии без края существовало слоение размерности 1 или $n-1$, необходимо, чтобы его эйлерова характеристика равнялась нулю. Докажите, что для существования слоения размерности 1 это условие является и достаточным.

Это условие является достаточным и для существования слоения размерности $n-1$; это — (довольно трудная) теорема Терстона.

Эйлерова характеристика нечетномерной сферы S^{2n+1} равна нулю, поэтому по теореме Терстона на ней должны существовать слоения размерности 1 и $2n$. Примером слоения размерности 2 на S^3 является слоение Рееба.

Задача 14.

1. Постройте на S^3 векторное поле без нулей. Опишите соответствующее слоение (т.е., устройство траекторий этого поля).

2. Проверьте, что плоскости, ортогональные (относительно стандартной римановой метрики в S^3) к векторам, построенным в пункте 1, образуют неинтегрируемое распределение.

Из пункта 2 задачи 14 видно, что конструкция Рееба нетривиальна. Более того, существует теорема Хефлигера, утверждающая, что слоение коразмерности 1 на замкнутом односвязном многообразии (например, на S^{2n+1}) вообще не может быть аналитическим.

Задача 15. Постройте четырехмерное слоение на S^5.

Рассмотрим теперь субмерсию многообразий $f : M \to N$, т.е., отображение, дифференциал которого в каждой точке имеет ранг, равный размерности n многообразия N (размерность многообразия M должна для этого быть $m \geq n$). Из теоремы о неявной функции следует, что связные компоненты прообразов $f^{-1}(x) \subset M$ $(x \in N)$ образуют n-мерное слоение на M.

Например, если $M = \mathbb{R}^2$, а $N = \mathbb{R}$ (т.е., f — функция двух переменных без критических точек), то все слои соответствующего слоения, очевидно, диффеоморфны $\mathbb{R}$. Слоение может, тем не менее, быть нетривиальным (т.е., не переводиться глобальным диффеоморфизмом в набор параллельных прямых) — приведите пример. Более того,

Задача 16. Докажите, что любое одномерное слоение $\mathcal{D}$ в $\mathbb{R}^2$ задается как множество связных компонент прообразов субмерсии $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, т.е., функции без критических точек.

Функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, задающая слоение $\mathcal{D}$, определена неоднозначно. Интересное обстоятельство заключается в том, что при этом близким слоениям не обязательно соответствуют близкие функции. Рассмотрим слоения, показанные на рисунке 5 (что происходит вне полосы $0 \leq x \leq 3$,

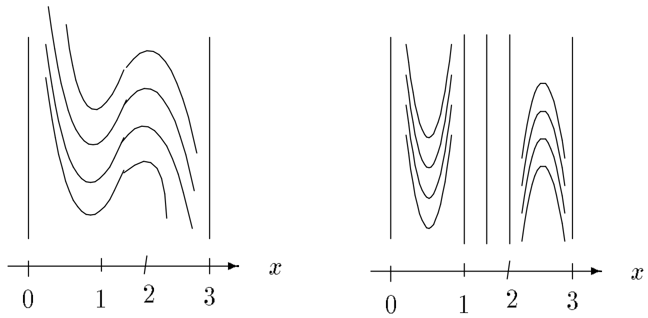


Рис. 5: Близкие слоения, не задаваемые близкими функциями

неважно). Ясно, что эти слоения (т.е., единичные нормали к слоям) сколь угодно близки в каждой точке. Однако для функции на левом рисунке имеем $f(0,0) < f(3,0)$, в то время как для правого рисунка $f(0,0) = f(1,0) > f(2,0) = f(3,0)$, и поэтому функции, задающие слоение слева, не могут стремиться к функции, задающей слоение справа (неравенства строгие !).

Задача 17. Пусть $M = I\!R^3$, $N = I\!R^2$, и все множества $f^{-1}(x)$ связны. Докажите, что они диффеоморфны $I\!R$. Постройте пример субмерсии $f : I\!R^3 \to I\!R^2$ (с несвязными $f^{-1}(x)$), для которой существуют точки $x_1, x_2 \in I\!R^2$ такие, что $f^{-1}(x_1)$ диффеоморфно прямой, а $f^{-1}(x_2)$ — окружности.

Еще один, особенно важный, пример слоений возникает в симплектической геометрии.

8.2 Скобки Пуассона и симплектические листы

Скобкой Пуассона называется билинейная операция $\{\cdot,\cdot\}$ на множестве $C^\infty(M)$ гладких функций на многообразии M, обладающая следующими свойствами:

1. Кососимметричность: $\{f,g\} = -\{g,f\}$;

2. Тождество Якоби: $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$;

3. Тождество Лейбница: $\{fg,h\} = f\{g,h\} + g\{f,h\}$.

Свойства 1 и 2 означают, что скобка Пуассона превращает $C^\infty(M)$ в алгебру Ли. Свойство 3 описывает взаимоотношения этой алгебры Ли со структурой обыкновенной (ассоциативной и коммутативной) алгебры на $C^\infty(M)$. А именно, утверждается, что для всякого $h \in C^\infty(M)$ операция $\{\cdot,h\}$ является дифференцированием алгебры.

Мы определили скобку Пуассона формально, как некоторую операцию на алгебре функций. Покажем, что эта операция — тензор, а именно:

Предложение 16 *Существует кососимметрическая билинейная форма* $\pi(x)(\cdot,\cdot)$ *на пространстве* $T^*_x M$ *такая, что* $\{f,g\}(x)=\pi(x)(df(x),dg(x))$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что $\{f,1\}=\{f,1\cdot 1\}=\{f,1\}+\{f,1\}$, откуда $\{\cdot,1\}=0$, и, в силу билинейности, $\{\cdot,h\}$ не изменится, если к h прибавить константу. Пусть теперь $dh(a)=0$ в некоторой точке a. По лемме Адамара (подготовительной теореме Вейерштрасса, теореме о каноническом отождествлении $T^*_a M$ с $\mathfrak{M}_a/\mathfrak{M}_a^2$, и т.п. — называйте как хотите) существуют функции $f_1,\ldots,f_n,g_1,\ldots,g_n$, все равные нулю в точке a и такие, что $h=\sum_{i=1}^n f_i g_i$. Тогда для любой функции r верно, что

$$\{r,h\}(a)=\sum_{i=1}^n\{r,f_ig_i\}(a)=\sum_{i=1}^n\Big(f_i(a)\{r,g_i\}(a)+g_i(a)\{r,f_i\}(a)\Big)=0.$$

То есть, $\{\cdot,h\}(a)=0$, если $dh(a)=0$. В силу билинейности и кососимметричности это означает, что $\{f,g\}(x)$ зависит только от значений дифференциалов $df(x)$ и $dg(x)$, т.е., форма $\pi(x)$ существует. В силу той же билинейности и кососимметричности эта форма сама — билинейная и кососимметричная. ■

Дифференциалы $df(x)$ и $dg(x)$ — ковекторы, поэтому $\pi(x)$ — кососимметрический бивектор. Ему канонически соответствует линейный оператор $\widetilde{\pi}(x):T^*_xM\to T_xM$, действующий по формуле $\langle\mu,\widetilde{\pi}(x)\nu\rangle=\pi(\mu,\nu)$. Его образ $\mathcal{D}(x)=\widetilde{\pi}(x)T^*_xM$ является линейным подпространством T_xM. Размерности подпространств $\mathcal{D}(x)$ могут меняться от точки к точке, однако из соображений непрерывности ясно, что для каждой точки $a\in M$ существует окрестность U такая, что при $x\in U$ размерность $\mathcal{D}(x)$ не меньше размерности $\mathcal{D}(a)$ (ранг оператора может "скакать" вверх, но не вниз). Возьмем точку a, в которой ранг $\mathcal{D}(a)$ максимален. Тогда в некоторой ее окрестности подпространства $\mathcal{D}(x)$ образуют распределение.

Теорема 10 *Это распределение интегрируемо.*

Для доказательства теоремы нам потребуется

Лемма 6

$$[\widetilde{\pi}(df),\widetilde{\pi}(dg)]=-\widetilde{\pi}(d\{f,g\}). \tag{10}$$

Доказательство. Для доказательства достаточно проверить, что левая и правая части равенства действуют одинаково на некоторую 1-форму вида dh. Мы будем использовать стандартные обозначения: $\mathcal{L}_Y$ будет означать оператор взятия производной Ли вдоль векторного поля Y, а ι_Y — оператор подстановки векторного поля Y в качестве *первого* аргумента дифференциальной формы. На *функции* (т.е., 0-формы) оператор ι_Y действует нулем. Мы будем пользоваться следующими фактами:

1. $\mathcal{L}_Y h = \iota_Y dh \stackrel{\text{def}}{=} \langle dh, Y\rangle$.
2. $[\mathcal{L}_{Y_1}, \mathcal{L}_{Y_2}] = \mathcal{L}_{[Y_1,Y_2]}$.

Имеем:

$$\begin{aligned}
\langle dh, [\widetilde{\pi}(df), \widetilde{\pi}(dg)]\rangle &= [\mathcal{L}_{\widetilde{\pi}(df)}, \mathcal{L}_{\widetilde{\pi}(dg)}]h = \\
&= [\iota_{\widetilde{\pi}(df)}d, \iota_{\widetilde{\pi}(dg)}d]h = \\
&= \iota_{\widetilde{\pi}(df)}d\iota_{\widetilde{\pi}(dg)}dh - \iota_{\widetilde{\pi}(dg)}d\iota_{\widetilde{\pi}(df)}dh = \\
&= \pi(df, d\pi(dg, dh)) - \pi(dg, d\pi(df, dh)) = \\
&= \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} = -\{h, \{f, g\}\} = \\
&= -\pi(dh, d\{f, g\}) = -\langle dh, \widetilde{\pi}(d\{f, g\})\rangle,
\end{aligned}$$

и лемма доказана. ■

Доказательство теоремы 10. Выберем в $\mathcal{D}(x)$ базис вида $Y_i = \widetilde{\pi}(x)(dp_i)$, где p_i — некоторые функции (локально это, очевидно, можно сделать). Теперь теорема следует из леммы 6 и теоремы Фробениуса (в “первой форме”, для векторных полей). ■

Интегральные многообразия расслоения $\mathcal{D}$ называются *симплектическими листами* скобки Пуассона. Причина такого названия — в следующем обстоятельстве.

Пусть N — симплектический лист. Нетрудно заметить, что для $x \in N$ аннулятор $(T_xN)^\perp \subset T_x^*M$ совпадает с ядром формы $\pi(x)$. Тем самым, $T_x^*N = T_x^*M/\operatorname{Ker}\pi(x)$, и форму $\pi(x)$ можно корректно спроектировать на T_x^*N. Это означает, что на N тоже определена скобка Пуассона — ограничение исходной скобки на M. Кроме того, на T_x^*N форма $\pi(x)$ не имеет ядра, т.е., существует оператор $\widetilde{\omega}(x) : T_xN \to T_x^*N$, обратный к $\widetilde{\pi}(x)$. Его можно интерпретировать как 2-форму на N, заданную формулой $\omega(Y, Z) = \langle\widetilde{\omega}(Y), Z\rangle$. Кососимметричность следует из соответствующего факта для бивектора $\pi(x)$: пусть $Y = \widetilde{\pi}(\alpha)$, $Z = \widetilde{\pi}(\beta)$, тогда $\omega(Y, Z) = \pi(\alpha, \beta)$. Из этого же факта и из тождества Якоби следует

Лемма 7 *Пусть*

$$X = \widetilde{\pi}(df), \quad Y = \widetilde{\pi}(dg), \quad Z = \widetilde{\pi}(dh). \tag{11}$$

Тогда

$$\mathcal{L}_X\omega(Y, Z) = -\omega(X, [Y, Z]).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X\omega(Y, Z) &= \iota_{\widetilde{\pi}(df)}d\pi(dg, dh) = \iota_{\widetilde{\pi}(df)}\widetilde{\omega}\widetilde{\pi}(d\{g, h\}) = \text{ (по лемме 6)} \\
&= -\iota_{\widetilde{\pi}(df)}\widetilde{\omega}([\widetilde{\pi}(dg), \widetilde{\pi}(dh)]) = -\omega(X, [Y, Z]).
\end{aligned}$$

■

Немедленным следствием доказанной леммы является

Теорема 11 *Форма ω замкнута.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 10, достаточно доказать, что $d\omega(X, Y, Z) = 0$, если X, Y, Z — векторные поля вида (11). Но, в силу леммы 7 и формулы Картана для внешнего дифференциала формы имеем:

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) &= \mathcal{L}_X \omega(Y, Z) + \mathcal{L}_Y \omega(Z, X) + \mathcal{L}_Z \omega(X, Y) + \\ &+ \omega(Z, [X, Y]) + \omega(X, [Y, Z]) + \omega(Y, [Z, X]) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Таким образом, форма ω на многообразии N замкнута и не имеет ядра. Такие формы называются *симплектическими структурами*. Всякая сиплектическая структура определяет пуассонову скобку. Действительно, пусть f и g — две функции на сиплектическом многообразии. Форма ω не имеет ядра, т.е., оператор $\widetilde{\omega}(x) : T_x N \to T_x^* N$ имеет обратный $\widetilde{\pi}(x) : T_x^* N \to T_x N$. Скобка Пуассона определяется теперь формулой $\{f, g\} = \mathcal{L}_{\widetilde{\pi}(df)} g$. Нужно проверить, что так определенная скобка удовлетворяет тождеству Якоби (два оставшихся свойства очевидны). Это можно сделать, просто обращая предыдущие рассуждения. Таким образом, мы показали, что сиплектическая структура и пуассонова скобка — две "взаимно обратных" операции (с той только разницей, что пуассонова скобка может быть вырожденной, и тогда нужно рассматривать симплектические листы).

Что почитать на ночь ...

Эскиз доказательства теоремы Терстона о слоениях содержится в дополнении к книге Громова [7], но текст, к сожалению, рассчитан на тех, кто знаком с оригинальной работой Терстона [14]. Теорема Хефлигера доказана в статье [17]. В зеленой книге Фукса–Фоменко [15] (в конце, параграф о слоениях) содержится решение задачи 15. Задача 17 решена в статье [10].

Скобки Пуассона и симплектические листы являются предметом обширнейшей области математики (работ — многие тысячи) — теории гамильтоновых систем; познакомиться с нею можно по обзору В.И.Арнольда и А.Б.Гивенталя [4], опубликованному в "зеленой" серии обзоров ВИНИТИ. С симплектической геометрией как таковой можно познакомиться по обзору Арнольда [2] (увы, кажется, до сих пор не опубликованному) или по книге [1].

9 Почти комплексные многообразия

В этой лекции мы изучим еще одно важное применение теоремы Фробениуса, связанное с понятием почти комплексного многообразия. Прежде чем определить это понятие, изучим подробнее комплексные структуры в линейном пространстве.

9.1 Комплексные структуры в линейном пространстве

Пусть E — $2n$-мерное линейное пространство (над полем $\mathbb{R}$). Оператор $J : E \to E$, удовлетворяющий соотношению

$$J^2 = -I, \tag{12}$$

где I — единичный оператор, задает в E структуру линейного пространства над полем $\mathbb{C}$: умножение вектора $v \in E$ на скаляр $a + bi \in \mathbb{C}$ задается формулой $(a+bi)v \stackrel{\text{def}}{=} (aI + bJ)v$. Поэтому сам оператор J часто называют *комплексной структурой* в пространстве E. В нечетномерных пространствах не существует операторов, удовлетворяющих соотношению (12), и структура пространства над $\mathbb{C}$ невозможна.

Обозначим $E^{(1)}(= E^* \otimes \mathbb{C})$ пространство $\mathbb{R}$-линейных отображений $E \to \mathbb{C}$. Комплексная структура в E определяет разбиение $E^{(1)}$ в прямую сумму $E^{1,0} \oplus E^{0,1}$. Пространство $E^{1,0}$ состоит из функционалов $\nu : E \to \mathbb{C}$, удовлетворяющих соотношению $\nu(Jv) = i\nu(v)$, а пространство $E^{0,1}$ — соотношению $\nu(Jv) = -i\nu(v)$. $E^{1,0}$ это просто комплексное сопряженное пространство к E, так как функционалы, входящие в него, не только $\mathbb{R}$-, но и $\mathbb{C}$-линейны; а $E^{0,1}$ это пространство “комплексно антилинейных” функционалов. Размерности введенных пространств таковы: $\dim_{\mathbb{C}} E = n, \dim_{\mathbb{R}} E = 2n, \dim_{\mathbb{R}} E^{(1)} = 4n, \dim_{\mathbb{C}} E^{(1,0)} = n, \dim_{\mathbb{R}} E^{(1,0)} = \dim_{\mathbb{R}} E^{(0,1)} = 2n$.

Пространство $E^{(2)} = E^{(1)} \wedge E^{(1)}$ состоит из $\mathbb{R}$-билинейных $\mathbb{C}$-значных кососимметричных форм на E. Оно представляется в виде прямой суммы уже трех компонент: $E^{(2)} = E^{2,0} \oplus E^{1,1} \oplus E^{0,2}$, где $E^{2,0} = E^{1,0} \wedge E^{1,0}$, и остальные два пространства — аналогично. *Оператор Нийенхейса* $S : E^{(2)} \to E^{(2)}$ определяется формулой

$$S(\eta)(v,w) = \eta(v,w) + i\eta(Jv,w) + i\eta(v,Jw) - \eta(Jv,Jw).$$

Следующее утверждение легко проверяется непосредственным вычислением:

Предложение 17 *Ядром оператора Нийенхейса является прямая сумма* $E^{2,0} \oplus E^{1,1}$.

Следствие *Пусть* $\nu_1, \dots, \nu_{2n}$ *— базис в пространстве* $E^{1,0}$*, и пусть* $S(\eta) = 0$*. Тогда найдутся такие функционалы* $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n} \in E^{(1)}$*, что* $\eta = \sum_{k=1}^{2n} \nu_k \wedge \alpha_k$.

9.2 Критерий Фробениуса

Пусть теперь M — $2n$-мерное (вещественное) многообразие. Будем говорить, что на M задана *почти комплексная структура*, если в каждой точке $x \in M$ определен оператор $J_x : T_x M \to T_x M$, гладко зависящий от точки и такой, что $J_x^2 = -I$. Почти комплексная структура превращает TM в n-мерное комплексное расслоение над многообразием M. Как и в случае линейного пространства, комплексифицированное кокасательное расслоение $T^*M \otimes \mathbb{C}$ разлагается в прямую сумму $E^{1,0} \oplus E^{0,1}$ (сечения расслоений $E^{1,0}$ и $E^{0,1}$ называются, соответственно, голоморфными и антиголоморфными 1-формами на M). Аналогично, определены комплекснозначые 2-формы типа $(2,0)$, $(1,1)$ и $(0,2)$.

На многообразии M определен пучок $\mathcal{F}$ локальных комплексных структур. Его сечения $\mathcal{F}(U)$ над открытым множеством U состоят из структур комплексного n-мерного многообразия (т.е., атласов с голоморфными отображениями перехода) в U. Соответственно, для каждой точки $a \in M$ определено множество $\mathcal{F}_a$ ростков комплексных структур в этой точке. Росток $f_a \in \mathcal{F}_a$ определяет очевидным образом комплексную структуру на пространстве $T_a M$. Поэтому, действуя по схеме лекции 7, мы можем говорить о интегрируемых (голономных) и неинтегрируемых почти комплексных структурах: структура J_x интегрируема (в малой окрестности U точки $a \in M$), если в U существует структура комплексного многообразия $f \in \mathcal{F}(U)$, росток f_x которой в произвольной точке $x \in U$ порождает оператор J_x. Иными словами, это означает, что в найдется набор функций (комплексная система координат), $f_1, \ldots, f_n : U \to \mathbb{C}$, дифференциалы которых в каждой точке $x \in U$ линейно независимы и удовлетворяют уравнениям Коши–Римана:

$$\langle df_k(x), J_x v \rangle = i \langle df_k(x), v \rangle \tag{13}$$

для любого вектора $v \in T_x M$. Иначе говоря, все 1-формы df_k имеют тип $(1,0)$.

Теорема Фробениуса позволяет сформулировать необходимое и достаточное условие интегрируемости.

Теорема 12 *Почти комплексная структура J интегрируема тогда и только тогда, когда для любых векторных полей Y, Z на M выполнено равенство:*

$$[JY, JZ] = [Y, Z] + J[JY, Z] + J[Y, JZ]. \tag{14}$$

Для того, чтобы применить при доказательстве теорему Фробениуса, нужно предположить, что многообразие M и почти комплексная структура J вещественно-аналитичны. Мы будем это предполагать, хотя теорема 12 верна и без этого.

Доказательство. Необходимость условия (14) доказывается непосредственной проверкой в координатах. Действительно, если $f_1, \ldots, f_n : M \to$

$\mathbb{C}$ — комплексные координаты на многообразии M в окрестности U точки a, то в T_xM при $x \in U$ имеется (вещественный) базис, состоящий из полей $\frac{\partial}{\partial f_k}, \frac{\partial}{\partial \overline{f_k}}$. Эти поля находятся в инволюции (т.е. их попарные коммутаторы равны нулю), а J действует на них так: $J\frac{\partial}{\partial f_k} = \frac{\partial}{\partial \overline{f_k}}$, $J\frac{\partial}{\partial \overline{f_k}} = -\frac{\partial}{\partial f_k}$. Поэтому достаточно проверить (14) для полей Y, Z вида $p\frac{\partial}{\partial f_k}$ и $q\frac{\partial}{\partial \overline{f_k}}$ (p, q — гладкие функции), что делается прямым вычислением.

Докажем достаточность. Окрестность U можно считать малой, и поэтому лежащей просто в $\mathbb{R}^{2n}$. Вложим $\mathbb{R}^{2n}$ в $\mathbb{C}^{2n}$, и пусть $V \subset \mathbb{C}^{2n}$ — окрестность точки a такая, что $U = V \cap \mathbb{R}^{2n}$. Рассмотрим множество $\Omega^{1,0}$ 1-форм типа $(1,0)$ на U. Так как формы $\nu \in \Omega^{1,0}$ вещественно-аналитичны, их можно продолжить до голоморфных форм в V; это множество продолжений мы опять обозначим $\Omega^{1,0}$. Формы $\nu \in \Omega^{1,0}$ определяют в V некоторое $2n$-мерное (вещественное) распределение $\mathcal{D}$.

Покажем, что $\mathcal{D}$ интегрируемо. Для этого возьмем форму $\nu \in \Omega^{1,0}$ и покажем, что $S(d\nu)(Y,Z) = 0$ для любых двух полей Y, Z. Действительно, по определению оператора Нийенхейса и по формуле Картана для дифференциала 1-формы имеем:

$$
\begin{aligned}
S(d\nu)(Y,Z) &= d\nu(Y,Z) + id\nu(JY,Z) + id\nu(Y,JZ) - d\nu(JY,JZ) = \\
&= \mathcal{L}_Y\nu(Z) - \mathcal{L}_Z\nu(Y) - \nu([Y,Z]) + i\mathcal{L}_{JY}\nu(Z) - i\mathcal{L}_Z\nu(JY) - i\nu([JY,Z]) + \\
&\quad + i\mathcal{L}_Y\nu(JZ) - i\mathcal{L}_{JZ}\nu(Y) - i\nu([Y,JZ]) - \mathcal{L}_{JY}\nu(JZ) + \mathcal{L}_{JZ}\nu(JY) + \nu([JY,JZ]) = \\
&= \nu([JY,JZ]) - i\nu([JY,Z]) - i\nu([Y,JZ]) - \nu([Y,Z]) = \\
&= \nu([JY,JZ] - J[JY,Z] - J[Y,JZ] - [Y,Z]) = 0.
\end{aligned}
$$

Согласно следствию из утверждения 17, это означает, что $d\nu = \sum_{k=1}^n \nu_k \wedge \alpha_k$, где $\nu_k(x)$ — некоторый базис в $E^{1,0}(x)$. Из теоремы Фробениуса (точнее, из ее голоморфного аналога) теперь следует, что распределение $\mathcal{D}$ интегрируемо.

Поскольку распределение интегрируемо, то его можно задать, по крайней мере локально, базисом из n *точных* (комплекснозначных) форм (ср. доказательство теоремы Фробениуса) $df_1, \ldots, df_n \in \Omega^{1,0}$. Такие функции задают систему комплексных координат в U. ■

9.3 Почти комплексные структуры, совместимые с симплектической

Между двумя структурами на многообразии — симплектической и почти комплексной — существуют интересные взаимоотношения. Первое, на что стоит обратить внимание, это тот факт, что и симплектические, и почти комплексные структуры существуют только на *четномерных* многообразиях (в линейном пространстве нечетной размерности не бывает невырожденных кососимметрических билинейных форм, и не бывает операторов, квадрат которых равен $-I$). Более того, любая из этих структур определяет ориентацию многообразия M. Если задана симплектическая структура ω на $2n$-мерном многообразии, то ω^n является ориентирующей формой (формой высшей размерности, не обращающейся в нуль); если TM обладает структурой комплексного расслоения (что эквивалентно заданию почти комплексной структуры на M), то оно ориентировано как вещественное расслоение, а это эквивалентно ориентации на M.

Определение. Почти комплексная структура J *совместима* с симплектической структурой ω, если для каждой точки $x \in M$ билинейная форма $g(x)$ на пространстве T_xM, задаваемая формулой $g(x)(u,v) = \omega(x)(J_x u, v)$ — симметрическая и положительно определенная (иными словами, g есть риманова метрика на M). Если почти комплексная структура совместима с симплектической и интегрируема (т.е., M есть комплексное многообразие), то многообразие M называется *кэлеровым*, а g — *кэлеровой метрикой.*

Прежде чем переходить к многообразиям, изучим ситуацию в одной точке. Пусть задано $2n$-мерное (вещественное) линейное пространство E, и в нем невырожденная кососимметрическая билинейная форма ω. Комплексная структура J (т.е., оператор $J : E \to E$, удовлетворяющий уравнению $J^2 = -I$), совместима с ω, если форма $g(u,v) = \omega(Ju, v)$ — симметрическая и положительно определенная.

Предложение 18 *Множество комплексных структур, совместимых с заданной формой ω, непусто и стягиваемо.*

Доказательство. Легко проверить, что в пространстве E найдутся n линейно независимых векторов $q_1, \dots, q_n$, обладающих свойством $\omega(q_i, q_j) = 0$. Тогда оператор J, удовлетворяющий уравнению $J^2 = -I$, однозначно определяется набором векторов $p_i = Jq_i$, причем единственным ограничением на этот набор является требование, что вектора $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ образуют базис пространства E. Рассмотрим $n \times n$-матрицу $A = (a_{ij})$, где

$$a_{ij} = \omega(p_i, q_j). \tag{15}$$

Легко проверить, что форма $g(u,v) = \omega(Ju, v)$ является симметричной и положительно определенной, если матрица A обладает этими же свойствами, и, кроме того,

$$\omega(p_i, p_j) = 0. \tag{16}$$

Тем самым, чтобы описать множество всех комплексных структур на E, совместимых с ω, необходимо описать множество наборов $p_1, \dots, p_n$, удовлетворяющих уравнениям (15) и (16) со всевозможными положительно определенными симметрическими матрицами A.

Опишем множество решений уравнений (15) и (16) для конкретной матрицы A. Возьмем какой-нибудь линейно независимый набор векторов

$p_1^0, \dots, p_n^0$, удовлетворяющий только уравнениям (15); тогда произвольное решение (15), очевидно, имеет вид $p_i = p_i^0 + \sum_{k=1}^n m_{ik} q_k$. Обозначим $b_{ij} = \omega(p_i^0, p_j^0)$. Для того, чтобы набор векторов p_i удовлетворял (16), нужно, чтобы матрица $M = (m_{ij})$ была решением уравнения

$$MA - AM^* = B, \tag{17}$$

где $B = (b_{ij})$. Поскольку B кососимметрична, в качестве решения можно взять $M = BA^{-1}/2$. Множество всех решений тем самым непусто и является аффинным пространством, размерность которого, очевидно, для всех невырожденных матриц A одинакова: это размерность множества матриц M таких, что $M^* = A^{-1}MA$, а это множество оператор A изоморфно отображает (действуя справа) на множество симметрических матриц.

Таким образом, мы показали, что множество решений системы (15), (16) (оно же — множество комплексных структур в E, совместимых с ω) расслоено над множеством положительно определенных симметрических матриц $n \times n$, причем слой расслоения — аффинное пространство, т.е., стягиваем. Поэтому множество совместимых с ω комплексных структур гомотопически эквивалентно базе этого расслоения. Последняя является выпуклым множеством, и потому стягиваема. ■

Следствием доказанного утверждения является

Теорема 13 *Множество почти комплексных структур на симплектическом многообразии, совместимых с его симплектической структурой, непусто и стягиваемо.*

Доказательство. Согласно Утверждению 18, это множество является множеством сечений расслоения, слой которого стягиваем. ■

Теорема 13 является источником большого числа инвариантов симплектических многообразий. Действительно, в качестве таковых можно брать инварианты почти комплексной структуры, совместимой с симплектической — в силу теоремы 13, не нужно заботиться о том, какую структуру выбрать. Например, можно определить такие инварианты: почти комплексная структура превращает расслоение $TM \to M$ в комплексное; поэтому у него определены классы Чженя $c_k \in H^{2k}(M)$. Эти классы — целочисленные, и поэтому при непрерывном изменении комплексной структуры остаются постоянными. Значит, классы Чженя комплексной структуры, совместимой с симплектической, являются характеристиками самой симплектической структуры. Это становится особенно любопытным, если рассмотреть первый класс Чженя $c_1 \in H^2(M)$. Симплектическая структура ω тоже представляет некоторый класс когомологий $[\omega] \in H^2(M)$; взаимоотношение между этим классами составляет важную характеристику симплектического многообразия. Многообразие называется *монотонным*, если эти классы пропорциональны: $[\omega] = \lambda c_1$ для некоторого $\lambda > 0$; *многообразием Калаби–Яу*, если $c_1 = 0$.

Пример: Проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ — кэлерово многообразие. Комплексная структура на нем имеется по определению, а симплектическая задается формулой Фубини–Штуди. В неоднородных координатах $w_i = z_i/z_0\,(i = 1,\ldots,n)$ форма Фубини–Штуди задается такой формулой (с точностью до постоянного множителя, который выбирают по-разному):

$$\omega = \frac{\sum_{k=1}^n dw_k \wedge d\overline{w_k}}{1+\sum_{k=1}^n |w_k|^2} - \frac{\left(\sum_{k=1}^n \overline{w_k} dw_k\right) \wedge \left(\sum_{k=1}^n w_k d\overline{w_k}\right)}{\left(1+\sum_{k=1}^n |w_k|^2\right)^2}.$$

(проверьте условие совместимости и выпишите формулу для кэлеровой метрики).

Более того, $\mathbb{C}P^n$— однородное многообразие, так как когомологии $H^2(\mathbb{C}P^n)$ одномерны. Произведение $M = \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^n$ можно наделить симплектической структурой, являющейся прямой суммой симплектических структур на сомножителях: $\omega = \omega_1 \oplus \omega_2$. Можно проверить (проделайте это !), что M монотонно тогда и только тогда, когда формы ω_1 и ω_2 совпадают (вообще говоря, они могут отличаться нормировкой).

Что почитать на ночь ...

Доказательство критерия интегрируемости почти комплексной структуры взято из книги Нарасимхана [12]. Понятие почти комплексной структуры, совместимой с данной симплектической структурой, породило мощный метод исследования симплектических многообразий — метод псевдоголоморфных кривых. Классическая (и вполне доступно написанная) статья по этому вопросу принадлежит Громову [8]. Есть также интересная, но нелегкая книга Д.МакДафф и Д.Саламона [11].

10 Гомотопический принцип для функций без критических точек

Основным содержанием данных лекций является исследование понятия голономности сечения различных расслоений. Напомним еще раз общую схему. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок над многообразием M; *ростком* $\mathcal{F}_a$ пучка $\mathcal{F}$ в точке $a \in M$ называется класс эквивалентности сечений пучка: два сечения $f_1 \in \mathcal{F}(U_1)$ и $f_2 \in \mathcal{F}(U_2)$ эквивалентны, если найдется окрестность V точки a, над которой они определены и совпадают: $V \subset U_1 \cap U_2$, и $\varrho_{U_1V}(f_1) = \varrho_{U_2V}(f_2)$. Всевозможные ростки над точкой a можно рассматривать как “слой расслоения” (часто и без кавычек). Сечение g такого расслоения называется *голономным* над множеством $U \subset M$, если найдется сечение f пучка над U, росток которого в каждой точке $x \in U$ совпадает со значением в этой точке сечения g. Если задано отображение κ слоя расслоения ростков в некоторое множество A, то над M возникает индуцированное расслоение, слоем которого над точкой a является образ $\kappa(\mathcal{F}_a) \subset A$. Сечение h такого расслоения называют голономным, если существует голономное сечение g расслоения ростков, такое что $h = \kappa(g)$.

В лекциях рассматривались два основных примера пучков. Первый пример это пучок (локальных) сечений некоторого расслоения $S \to M$: множество $\mathcal{F}(U)$ состоит из всевозможных сечений $\varphi : U \to S$. Если ростку сечения в точке a сопоставить его r-струю, то вышеописанная конструкция приводит к расслоению r-струй $S^{(r)} \to M$. Второй пример — пучок (параметризованных) подмногообразий. Элементами $\mathcal{F}(U)$ здесь являются пары (N, f), где N — k-мерное многообразие, а $f : M \to U$ — вложение. Ростку подмногообразий в точке a мы сопоставляли образ его дифференциала $Df(a)(T_{f^{-1}(a)})N \in G(T_aM, k)$ — так получались k-мерные распределения.

В основном исследовались два вопроса. Во-первых, как отличить голономное сечение от неголономного, и во-вторых, можно ли произвольное сечение продеформировать так, чтобы оно стало голономным. В случае расслоения струй ответом на первый вопрос будет условие "$k+1$-струя является 1-струей k-струи, для всех k от 0 до $r-1$", а в случае распределений — условие Фробениуса. Что же касается второго вопроса, то его нужно рассмотреть подробнее.

Множество S_{hol} голономных сечений является подмножеством множества S всех сечений. Отображение вложения ι индуцирует отображение гомотопических групп $\iota_* : \pi_m(S_{hol}) \to \pi_m(S)$; это касается также и "группы" π_0, т.е., множества компонент линейной связности. Говорят, что для расслоения (или для его сечений) выполнен *гомотопический принцип* (коротко — h-принцип) , если $\iota_* : \pi_0(S_{hol}) \to \pi_0(S)$ — эпиморфизм, т.е., если каждая компонента линейной связности S содержит голономный элемент. Это как раз и означает, что всякое отдельно взятое сечение можно продеформировать так, что оно станет голономным. Если $\iota_* : \pi_0(S_{hol}) \to \pi_0(S)$ — изоморфизм, то говорят, что выполнен *однопараметрический* h-*принцип*. Это означает, что выполнен (непараметрический) h-принцип, и что если два голономных сечения гомотопны (в множестве всех сечений), то существует гомотопия между ними, составленная из голономных сечений. Если же $\iota_* : \pi_m(S_{hol}) \to \pi_m(S)$ — изоморфизм для всех m (т.е., ι — слабая гомотопическая эквивалентность), то говорят, что для расслоения (или для его сечений) выполнен *многопараметрический* h-*принцип*. Многопараметрический h-принцип означает, что не только отдельные сечения, но и их семейства, зависящие от конечного набора параметров, можно непрерывно продеформировать в такие же семейства, составленные из голономных сечений. В лекции 5 был доказан многопараметрический h-принцип для погружений сфер в евклидовы пространства. Что касается распределений, то для них вопрос об h-принципе не исследовался (ответ — положительный).

Приведем пример доказательства однопараметрического h-принципа.

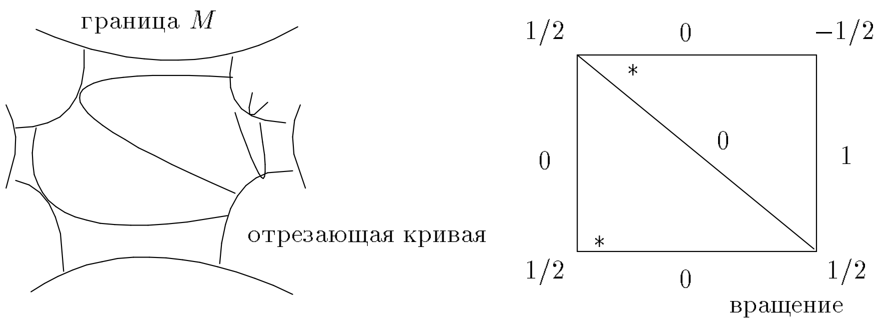


Рис. 6: “Круг с рогами”, основные линии и диаграмма

Рассмотрим двумерное многообразие M с краем, и на нем множество $\mathcal{A}(M)$ функций f, обладающих следующими свойствами:

1. $df(x) \neq 0$ при всех $x \in M$;

2. $f(x)$ постоянна на каждой компоненте линейной связности границы ∂M.

Рассмотрим также множество $\mathcal{B}(M)$ 1-форм ν на M, обладающих следующими свойствами:

1. $\nu(x) \neq 0$ при всех $x \in M$;

2. $\langle \nu(x), Y \rangle = 0$ при всех $x \in \partial M$ и $Y \in T_x \partial M \subset T_x M$.

Очевидно, что $f \in \mathcal{A}(M) \Leftrightarrow df \in \mathcal{B}(M)$.

h-принцип означает, что каждую форму с такими свойствами (или семейство форм, и т.д.) можно продеформировать в точную. Мы докажем однопараметрический h-принцип для многообразий M специального вида — “кругов с рогами”, изображенных на рис. 6. Таким образом, наша задача заключается в описании компонент линейной связности множеств $\mathcal{A}(M)$ и $\mathcal{B}(M)$. Для произвольного двумерного многообразия задача решается аналогично (по идее), но более сложно (технически).

Прежде всего сведем задачу к описанию поведения функций и форм на *компактном* множестве. Для этого соединим соседние компоненты границы ∂M линиями (“отрезающие линии” на рис. 6), перпендикулярными к границе. Эти линии отрезают от M компакт $\widetilde{M}$, и имеет место

Предложение 19 *Компонента линейной связности, которой принадлежит функция $f \in \mathcal{A}(M)$, и компонента линейной связности, которой принадлежит форма $\nu \in \mathcal{B}(M)$, полностью определяются ограничениями $f|_{\widetilde{M}}$ и $\nu|_{\widetilde{M}}$.*

Доказательство. Удвоим систему отрезающих линий, проведя параллельно каждой такой линии γ еще одну линию γ' вблизи нее (и внутри множества $\widetilde{M}$). Эти дополнительные линии ограничивают множество $\widetilde{M}' \subset \widetilde{M}$. Заметим, что существует семейство гладких отображений $D_t : M \to M$ $(0 \le t \le 1)$ такое, что

1. $D_0 = \mathrm{Id}$;
2. $D_t|_{\widetilde{M}'} \equiv \mathrm{id}$ для всех t;
3. $D_1(M) = \widetilde{M}$.

Рассмотрим теперь функцию $f = f_0 \in \mathcal{A}(M)$, и определим семейство функций $f_t \stackrel{\mathrm{def}}{=} f \circ D_t$. Функция f_t лежит в $\mathcal{A}(M)$ и зависит от t непрерывно, так что она лежит в той же компоненте связности множества $\mathcal{A}(M)$, что и f. Но f_1 зависит только от ограничения $f|_{\widetilde{M}}$. Для форм рассуждение аналогично. ■

Сначала займемся классификацией форм. Поскольку M является подмножеством $\mathbb{R}^2$, то 1-форма это просто векторное поле. Форма $\nu \in \mathcal{B}(M)$ это векторное поле, не обращающееся в нуль, и в точках границы ∂M нормальное к ней. Один набор гомотопических инвариантов здесь очевиден: на каждой компоненте границы ∂M поле может торчать наружу или внутрь M, причем при деформации поля эта его характеристика, очевидно, не меняется. Однако существуют и другие гомотопические инварианты (общее число компонент линейной связности $\mathcal{B}(M)$, как мы сейчас увидим, бесконечно). Для того, чтобы определить эти инварианты, пронумеруем компоненты границы ∂M по циклу от 1 до N, и соответствующим образом перенумеруем отрезающие кривые: γ_k соединяет k-ю компоненту границы с $k+1$-ой. Обозначим n_k число оборотов, которые делает вектор $\nu(x)$ относительно касательной к γ_k в точке x, пока эта точка пробегает всю кривую γ_k. Поскольку кривая γ_k в концах перпендикулярна ∂M, а вектор ν также перпендикулярен ∂M, число n_k — обязательно целое или полуцелое. Это показывает, что числа n_k — гомотопический инвариант формы ν: если форма меняется непрерывно, то n_k тоже меняются непрерывно, и поэтому не меняются вовсе.

Найденную систему инвариантов формы ν можно графически изобразить в виде такой диаграммы: нарисуем N-угольник, вершины которого соответствуют кривым γ_k, а стороны — компонентам границы. Стороны окрасим в два цвета, в зависимости от того, куда — наружу или внутрь — смотрит вектор ν на этой компоненте границы. Около вершин напишем инварианты n_k.

Такая диаграмма обладает следующими свойствами:

1. n_k — целое число, если стороны, разделенные k-й вершиной, окрашены в разные цвета, и полуцелое, если в один и тот же цвет.

2. $\sum_{k=1}^{N} n_k = N/2 - 1$.

Свойство 1 очевидно (скажем, если цвета различны, то вектор ν на одном конце кривой γ_k направлен внутрь, а на другом — наружу, и поэтому число оборотов — целое). Свойство 2 выражает тот факт, что суммарное вращение векторного поля на границе области (в данном случае области $\widetilde{M}$) равно нулю, если векторное поле внутри области в нуль не обращается.

Оказывается, диаграмма это полная система инвариантов форм $\nu \in \mathcal{B}(M)$. Точнее, имеет место

Теорема 14 *Любые две формы $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{B}(M)$ с одинаковыми диаграммами гомотопны (внутри множества $\mathcal{B}(M)$). Для любой диаграммы, удовлетворяющей условиям 1 и 2, существует форма $\nu \in \mathcal{B}(M)$, имеющая такую диаграмму.*

Теорема легко вытекает из следующих двух лемм:

Лемма 8 *Два отображения окружности в себя гомотопны тогда и только тогда, когда их степень (вращение) одинаково.*

Лемма 9 *Векторное поле без нулей, заданное на границе круга, можно продолжить без нулей внутрь круга тогда и только тогда, когда его вращение равно нулю. Если продолжения существуют, то любые два из них можно соединить гомотопией, постоянной на границе.*

Доказательства лемм и окончательный вывод из них теоремы 14 мы приводить не будем — это хорошее (и совсем несложное) упражнение.

Перейдем к описанию компонент линейной связности множества $\mathcal{A}(M)$. Если функция $f \in \mathcal{A}(M)$ меняется непрерывно, то непрерывно меняется и ее дифференциал $df \in \mathcal{B}(M)$. Поэтому диаграмма формы df является гомотопическим инвариантом функции f. Мы хотим доказать (это и есть однопараметрический h-принцип), что других инвариантов нет.

Для произвольной функции $f \in \mathcal{A}(M)$ рассмотрим ее *основные линии* — линии уровня $f|_{\widetilde{M}}$, касающиеся отрезающих кривых (см. рис. 6). Нетрудно усмотреть, что для функции $f \in \mathcal{A}(M)$ общего положения существует лишь конечное число основных линий, все значения функции на этих линиях различны, каждая линия касается ровно одной отрезающей кривой, и притом невырожденным образом. Более того, имеет место

Предложение 20 *Компонента связности множества $\mathcal{A}(M)$, которой принадлежит функция f, полностью определяется основными линиями функции f.*

Доказательство. Основные линии делят $\widetilde{M}$ на "ячейки". Предположим сначала, что у двух функций $f_0, f_1 \in \mathcal{A}(M)$ совпадают не только основные линии, но и *значения* на этих линиях. В этом случае гомотопировать f_0 к

f_1 можно на каждой ячейке в отдельности, сохраняя значение на границе неизменным. Каждая ячейка ограничена двумя основными линиями (одна из которых может быть точкой, см. рис. 6). Тем самым задача сводится к доказательству такой леммы:

Лемма 10 *Множество функций на квадрате, не имеющих критических точек и принимающих на одной из сторон значение* 0, *а на противоположной стороне — значение* 1, *линейно связно.*

Лемма 10 наглядно очевидна, но ее аккуратное доказательство довольно муторно, и мы его не приводим.

Пусть теперь совпадают только основные линии, но не значения. Построим "граф ячеек": вершинами его будут ячейки, и две вершины соединены ребром, если соответствующие ячейки имеют общую основную линию. Ребро ориентировано (от ячейки с меньшими значениями к ячейке с большими). Ясно, что построенные графы для функций f_0 и f_1 совпадают. Мы хотим прогомотопировать функцию f_0 так, чтобы основные линии не менялись, а значения на них стали равными значениям функции f_1.

Очевидно, построенный граф не содержит ориентированных циклов (если вершины a и b соединены стрелкой, то $f_1(a) < f_1(b)$). Верно, однако, большее — этот граф является деревом (т.е., не содержит циклов вообще). Это следует из того факта, что каждая основная линия делит $\widetilde{M}$ на две части. Рассмотрим теперь корневую вершину этого дерева. Она соответствует ячейке, одна из сторон которой лежит на границе множества M. Прибавляя константу, можно считать, что значения f_0 и f_1 на этой стороне совпадают (равны a). Нетрудно построить теперь деформацию f_0, которая сохранит все ее линии уровня, сделает значение $f_0|_\ell = f_1|_\ell$, и на всех ячейках, кроме рассматриваемой сведется просто к прибавлению константы. Теперь перейдем к ячейке, соседней с корневой. Мы находимся в том же положении, что и раньше — значения функций на одной из сторон рассматриваемой ячейки совпадают, а на другой их можно приравнять той же конструкцией. Поскольку граф — дерево, описанный процесс можно продолжать беспрепятственно, пока не будут обработаны все ячейки. ■

Таким образом, исследование функций свелось к исследованию взаимного их основных линий. Картина таких линий полностью характеризует функцию с точностью до гомотопии, но не является гомотопическим инвариантом: если функция $f_t \in \mathcal{A}(M)$ непрерывно меняется, то ее основные линии могут подвергаться перестройкам. Мы используем сначала это обстоятельство для того, чтобы упростить, по возможности, картину.

Поскольку рассматриваемая функция — общего положения, то каждая основная линия характеризуется тремя числами ijk: она пересекает отрезающую кривую номер i, касается кривой номер j, и затем пересекает кривую номер k. Бывают, правда, линии, сводящиеся к единственной точке, но легко видеть, что положение таких линий однозначно, с точностью до

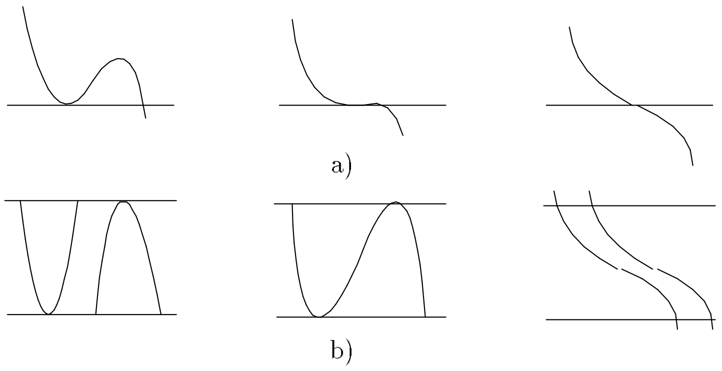


Рис. 7: Упрощение картины основных линий

гомотопии, определяется положением прочих основных линий, так что мы не будем такие "точечные линии" учитывать. Некоторые из номеров i, j, k могут совпадать, однако, если $i = j$ или $j = k$, то функцию можно прогомотопировать так, что такой линии не станет (см. рис. 7a)). Тем самым можно гомотопией избавиться от таких линий, и оставить только линии вида ijk с различными i, j, k, и линии вида iji, $i \neq j$. Заметим еще, что если есть две соседние линии, iji и jij, то их можно "сократить", как показано на рис. 7b).

Сделав все необходимые упрощения, мы можем теперь изобразить картину основных линий в виде диаграммы. Для этого возьмем диаграмму формы df (многоугольник с раскрашенными сторонами и числами у вершин), и сделаем следующее. Для каждой линии вида iji соединим вершины номер i и номер j стрелкой; при этом если e_{ij} стрелок соединяют одну и ту же пару вершин, то мы нарисуем только одну стрелку, рядом с которой напишем число e_{ij}. Для каждой линии вида ijk мы нарисуем треугольник ijk, около вершины номер j которого поставим звездочку. Нетрудно видеть, что полученная картинка (назовем ее диаграммой функции) позволяет восстановить положение основных линий функции f однозначно с точностью до гомотопии.

Числа e_{ij} и звездочки позволяют восстановить значение инвариантов n_k. Для этого мы будем считать, что $e_{ji} \stackrel{\text{def}}{=} -e_{ij}$ (смена ориентации ребра соответствует смене знака числа на нем), и тогда нетрудно показать, что число n_k вычисляется по такому правилу: это $1/2$ от числа s_k звездочек, стоящих около k-й вершины (во всех треугольниках диаграммы) плюс $1/2$ от суммы чисел e_{kj} по всем ребрам kj, выходящим из этой вершины.

Предложение 21 *Полученные треугольники и ребра образуют триангуляцию исходного многоугольника.*

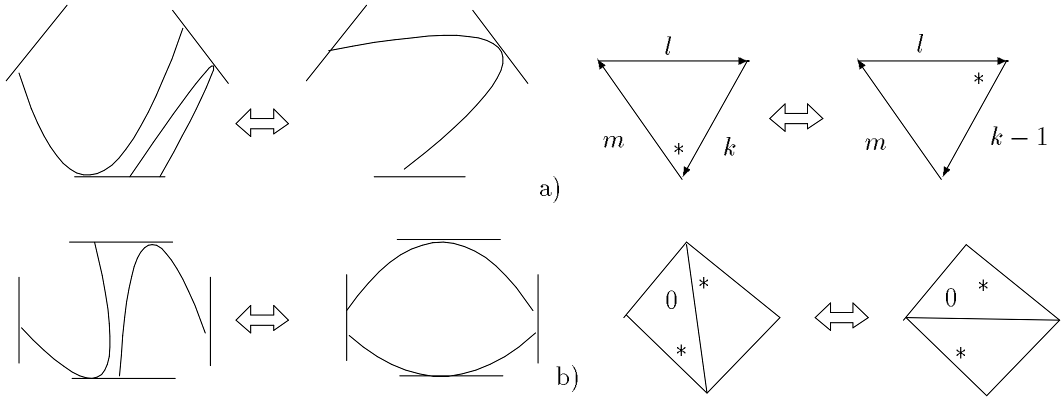


Рис. 8: Преобразования диаграмм

Доказательство. Действительно, легко видеть, что различные треугольники ijk не могут пересекаться, так как тогда соответствующие основные линии должны были бы пересечься, что невозможно. Аналогичным образом показывается, что если ребро ij присутствует на диаграмме, то оно является стороной некоторого треугольника. Таким образом, многоугольник разрезан на части.

Выпишем теперь свойство 2 инвариантов n_k:

$$N-2=2\sum_{k=1}^{N}n_k=\sum_{k=1}^{N}s_k+\sum_{k=1}^{N}\sum_{j}e_{kj}.$$

Вторая сумма равна нулю, поскольку каждое число e_{ij} входит в нее дважды с разными знаками. Поэтому $\sum_{k=1}^{N}s_k=N-2$, т.е., в полученно разбиении содержится $N-2$ треугольника. Поэтому это разбиение — триангуляция. ■

Рассмотрим теперь преобразования, которым может подвергаться диаграмма, когда функция f_t непрерывно изменяется. Существуют два типа таких преобразований, они показаны на рис. 8. Покажем, что с помощью этих преобразований можно любую диаграмму преобразовать в любую другую, лишь бы у них совпадали инварианты n_k — это и завершит доказательство однопараметрического h-принципа.

Сначала забудем о числах e_{ij} и звездочках, и рассмотрим только триангуляции. Рассмотрим вершину 1 и какой-нибудь четырехугольник вида $1ijk$. Если в нем есть ребро $1j$, то оставим его как есть, а если есть ребро ik, то поступим так: сначала несколько раз применяя преобразование рис. 8а), добьемся того, чтобы $e_{ik}=0$, а после этого сделаем преобразование рис. 8b), увеличив таким образом число ребер, выходящих из вершины 1. Через несколько ходов триангуляция станет стандартной — вершина 1 будет соединена со всеми остальными. Теперь с помощью преобразования рис. 8a) мы можем еще и все звездочки поставить где угодно — скажем, у той же вершины 1.

Если мы применим эти преобразования к двум диаграммам, для которых совпадают инварианты n_k, то они будут различаться только числами e_{ij}. Заметим, что в силу выписанного выше правила вычисления n_k нам достаточно приравнять теперь все числа вида e_{1k} для $k = 2, \dots, N-1$ — равенство остальных e_{ij} будет обеспечено автоматически. А эти числа приравнять можно так. Применим операцию рис. 8a) трижды к треугольнику 123. Это изменит e_{12} на единицу (в любую сторону), а триангуляция и положение звездочек останется неизменным. Так можно получить желательное значение e_{12}. Сделаем теперь то же самое с треугольником 134, затем с 145, ..., и с $1(N-2)(N-1)$. Это завершает доказательство однопараметрического h-принципа.

Существует ли в вышеописанной ситуации многопараметрический h-принцип, неизвестно.

Что почитать на ночь

Многократно упоминавшаяся в этих лекциях книга Громова [7] целиком посвящена h-принципам для различных расслоений (в том числе там разобран многопараметрический h-принцип для распределений). Доказательство однопараметрического h-принципа для функций без критических точек содержится в статье [5], которая будет опубликована в сборнике трудов НМУ.

Литература

[1] B.Aebischer et.al. *Symplectic geometry.* Birkhäuser, 1993. An introduction based on the Seminar in Bern.

[2] V.I.Arnold. Symplectic geometry and topology. unpublished, 1993.

[3] В.И.Арнольд, А.Н.Варченко, С.М.Гусейн-Заде. *Особенности дифференцируемых отображений.* Наука, Москва, 1984.

[4] В.И.Арнольд, А.Б.Гивенталь. *Симплектическая геометрия.* Динамические системы–4. ВИНИТИ, 1985.

[5] Yu.M.Burman Triangulations of surfaces with boundary and homotopy principle for functions without critical points (unpublished).

[6] Р.Годеман. *Алгебраическая топология и теория пучков.* ИЛ, Москва, 1961.

[7] М.Громов. *Дифференциальные соотношения с частными производными.* Мир, Москва, 1990.

[8] M.Gromov. Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent.math.*, pages 306–347, 1985.

[9] Л.В.Канторович, Г.П.Акилов. *Функциональный анализ в нормированный пространствах.* Наука, Москва, 1959.

[10] A.F.Costa, F.G.Gascon, A.Gonzalez-Lopez. On codimension one submersions of euclidean spaces. *Invent.math.*, (93):545–555, 1988.

[11] D.McDuff, D.Salamon. *J-holomorphic curves and quantum cohomology*, volume 6 of *University Lecture series.* American Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[12] Р.Нарасимхан. *Анализ на действительных и комплексных многообразиях.* Мир, Москва, 1971.

[13] Дж.Окстоби. *Мера и категория.* Современная математика (популрная серия). Мир, Москва, 1974.

[14] W.Thurston. Existence of codimension-one foliations. *Ann.Math.*, (104):249–268, 1976.

[15] А.Т.Фоменко, Д.Б.Фукс. *Курс гомотопической топологии.* Наука, Москва, 1989.

[16] A.Hatcher.W.Thurston. A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface. *Topology*, 19:221–237, 1980.

[17] A.Haefliger. Variétés feuilletés. *Ann.Sc.Norm.Sup.Pisa*, 16(3): 367–397, 1962.