Дифференциальное исчисление функций многих переменных.

Понятие дифференциала и дифференцирования.

Линейная часть приращения функции.

Выделим линейную часть приращения функции:

$$f(x+h) = f(x) + A(x)\cdot h + o(h) \quad \overset{Id}{\Rightarrow} \quad f(x+h) - f(x) = A(x)\cdot h + o(h),$$

или, в других обозначениях:

$$f(x+h) - f(x) \approx A(x)\cdot h.$$

Дифференцированием и называется процесс линеаризации функции. Рассмотрим примеры:

1) Функция sin. Рассмотрим линейную часть в точке 0: $\sin h \ \sim \ h$, т.е. $\sin h = h + o(h)$.

2) Определитель det. Пусть E — единичная матрица. Тогда $\det(\mathrm{E}+h) \approx 1 + \operatorname{tr} h$, в частности $\det(\mathrm{E}+t\Delta) \approx \ 1 + t(\operatorname{tr}\Delta)$

3) Обращение матрицы, т.е. функция $(X)^{-1}$. В окрестности единичной матрицы E имеем[1] : $(\mathrm{E}+h)^{-1} = \mathrm{E} - h + o(h)$, а в окрестности произвольной матрицы A имеем : $(A+h)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}hA^{-1} + o(h)$.

4) Векторы. Есть несколько важных примеров:

   а) Скалярное произведение: $\langle a, b\rangle$.

   Упражнение 0.1. *Получить линейную функцию для приращения скалярного произведения* $\langle a+\Delta a, b+\Delta b\rangle$

   б) Векторное произведение $[a, b]$.

$$[a+\Delta a, b+\Delta b] = [a,b] + \underbrace{[\Delta a, b] + [a, \Delta b]}_{\text{линейна по приращению}} + [\Delta a, \Delta b]$$

   в) Объем. Это определитель $\det(a_1, \ldots, a_n)$.

---

[1]Точная формула обращения: $(E+h)^{-1} = E - h + h^2 - h^3 + h^4 - \ldots$

Упражнение 0.2. *Чему равна линейная часть приращения* $\det(a_1 + \Delta a_1, \ldots, a_n + \Delta a_n)$*?*

5) Рассмотрим функцию от трех переменных $f(x, y, z)$. Переменные заданы с погрешностью $x \pm \Delta_x$, $y \pm \Delta_y$, $z \pm \Delta_z$. Какова погрешность вычисления?

6) Пример из механики: движение точки. Положение точки в момент времени t определяется функцией $x(t)$

$$x(t + \tau) \approx x(t) + v(t)\tau$$

7) В пространстве многочленов степени n можно определить чисто алгебраически операцию взятия производной многочлена. Она задает отображение $\frac{d}{dx} : \; P_n \;\to\; P_n$.

   Вопрос. Какова размерность пространства P_n?

   Упражнение 0.3. *В базисе* $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ *написать матрицу отображения* $\frac{d}{dx}$ *(*P_n *отображается в* P_{n-1}*).*

8) Пусть X — матрица. Экспонента матрицы задается рядом

$$e^X = E + \frac{X}{1!} + \frac{1}{2!}X^2 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n + \cdots.$$

   Упражнение 0.4. *Рассмотрим диагональную мптрицу:*

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

   Чему равна e^X*?*

   Дифференцирование является линейным оператором. Поэтому формула Тейлора может быть записана как применение соответствующей экспоненты: $(e^{t\frac{d}{dx}})P(x) = P(x + t)$

Обозначения из линейной алгебры:

Возьмем линеный оператор $A : X \to Y$. X, Y — векторные пространства. Пусть $\{e_i\}$ — базис в X; $\{l_j\}$ — базис в Y. Индекс i пробегает значения от 1 до $\dim X = m$, j пробегает значения от 1 до $\dim Y = n$.

Пусть $x \in X$, тогда

$$Ax = A(x^i e_i) = x^i(Ae_i) = x^i(a_i^j l_j) = \underbrace{(a_i^j x^i)} l_j = y^j l_j\,,$$

где $a_i^j x^i$ — координаты образа x в базисе $\{l_j\}$.

Числа a_i^j образуют матрицу и предыдущую формулу можно записать в виде произведения матриц:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеем запись линейного отображения в координатах: $y^j = a_i^j x^i$.

Норма векторного пространства: $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$.

Свойства нормы:

1) $\forall x \in X \quad \|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \bar{0}$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in X$.

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$.

Дадим строгое определение использовавшегося выше асимптотического обозначения $o(h)$

Определение. *Пусть* $f : X \to Y$.

$$f(h) = o(h) \quad \stackrel{def}{=} \quad \|f(h)\|_Y = \alpha(h)\|h\|_X,$$

где $\alpha(h) \to 0$ *при* $\|h\| \to 0$.

Определение дифференциала функции.

Рассмотрим функцию $f : X \to Y$. Пусть выделена линейная часть приращения функции f в окрестности точки x. Ей соответствует некоторое линейное отображение $A(x)$, определенное на множестве *смещений* от точки x и принимающее значение в множестве *смещений* от точки $f(x)$. Это отображение и газвается *дифференциалом функции.*

Дифференциал определяется на множестве смещений от точки x. Смещения от точки x образуют свое пространство, которое называется *касательным пространством* в точке x. Обозначение — T_xX. Дифференциал определен в этом пространстве.

$A(x) : T_xX \to T_{y=f(x)}Y$ — касательное отображение.

Дифференцирование функции заключается в отыскании другой функции, действующей на другом пространстве, но определяемой для точек исходного пространства.

Пример линейной функции:

$$A(x+h) - Ax = Ax + Ah - Ax = Ah$$

Верно ли, что $A' = A$?

Лекция 2.

$$f(x+h) - f(x) = A(x)h + o(h)$$

$A(x)h$ обозначается $f'(x)h$ или $df(x)h$.

Задачи локальной линеаризации функций возникают всюду. Аргумент и приращение могут быть не обязательно числами (см. примеры выше).

Примеры:

1. Маятник

Уравнение движения маятника:

$$R\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi$$

φ_0 — начальный угол отклонения. Если $\varphi_0 \ll 1$ (т.е. маятник отклоняется на малый угол) уравнение можно упростить и решить: $R\ddot{\varphi} = -mg\varphi$ (гармонические колебания).

2. Пушка

Выстрел не точен. Известно расстояние от цели до места, где упало ядро.

Задача: по расстоянию от цели до места падения уметь считать поправку к углу выстрела.

3. Абсолютная погрешность:

$$\Delta f \stackrel{\text{def}}{=} |f(x+h) - f(x)| \approx |f'(x)h| = df(x)h$$

Относительная погрешность:

$$\delta f(x)h \stackrel{\text{def}}{=} \frac{df(x)h}{|f(x)|}$$

Относительная погрешность — логарифмическая производная

$$d\ln f(x)h = \frac{df(x)h}{f(x)}.$$

Асимптотические обозначения:

$$o(h) : |o(h)| = \alpha(h) \cdot |h|$$

и $\alpha(h) \to 0$ при $|h| \to 0$ (для векторных функций $\|h\|$).

$$O(h) : |O(h)| = \alpha(h) \cdot |h|$$

, где $\alpha(h)$ — финально ограничена при $h \to 0$.

Асимптотические равенства:

1) $o(f) + o(f) = o(f)$;
2) $o(f) + O(f) = O(f)$;
3) $O(f) + O(f) = O(f)$;
4) $\lambda o(f) = o(\lambda f)$;
5) $\lambda O(f) = O(\lambda f)$.

Полилинейная функция: $d(a \cdot b) = da \cdot b + a \cdot db$.

Примеры: $\langle a, b\rangle$, $[a, b]$, $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Метод ломаных Эйлера.

Это метод приближенного решения дифференциальных уравнений.

Уравнение $\dot{x} = kx$, где $\dot{x}$ — скорость процесса, встречается всамых разных задачах: радиоактивного распада, размножения бактерий и т.д.

$x(t)$ — количество бактерий во время t.

$x(0) = x_0$

$x(\Delta) \approx x_0 + x_0\Delta$, где $\Delta = \frac{T}{n}$.

Весь процесс проходится малыми шагами.

Для простоты полагаем $\dot{x} = x$.

$$x((k+1)\frac{T}{n}) \approx x(k\frac{T}{n}) + \dot{x}(k\frac{T}{n})\frac{T}{n} = x(k\frac{T}{n})(1+\frac{T}{n}) = x_0(1+\frac{T}{n})^k$$

Тогда $x(T) \approx x_0(1+\frac{T}{n})^k$

При увеличении числа шагов, т.е. при увеличении n точность приближения растет.

Еще один пример: движение планет.

$r = r(t)$, где $r(t) = (x(t), y(t))$, задает траекторию движения. $v = \dot{r}$ — скорость, $a = \ddot{r}$ — ускорение движения.

Закон Ньютона: $ma = F$

Дифференциальное уравнение движения:

$$m\ddot{r}(t) = -G\frac{mM}{|r|^3}r(t)$$

Получаем такую задачу. Даны начальные условия: $r_0 = r(0)$, $v_0 = \dot{r}(0)$. Необходимо рассчитать траекторию движения (зная начальные данные).

По методу Эйлера процесс можно разбить на маленькие шаги:

$$v(\Delta) \approx v(0) + a(0) \cdot \Delta,$$

ускорение можно определить из уравнения движения.

Определение дифференцируемой функции.

Определение. *Функция*[2] $f : X \to Y$ *называется дифференцируемой в точке* $x \in X$*, если имеет место представление* $f(x+h) - f(x) = A(x)h + o(h)$ *(* $h \to 0$*), где* $A(x) : T_xX \to T_{y=f(x)}Y$ *— дифференциал функции. Обозначается* $df(x)$ *или* $f'(x)$*.*

Теперь рассмотрим примеры для функций $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ при разных m, n.

$n = 1$. Числовые функции $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

При $m = 1$: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$f(x+h) - f(x) = A(x)h + o(h).$$

Благодаря тому, что $A(x)$ и h — числа, то

$$f'(x) = A(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

При $m > 1$: $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

Касательное пространство в точке $x \in \mathbb{R}^m$: совпадает с самим $\mathbb{R}^m$: $T_x\mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^m$.

$$df(x) = A(x) : T_x\mathbb{R}^m \to T_y\mathbb{R}$$

Таким образом для того, чтобы знать $A(x)$, необходимо знать, как устроены линейные отображения $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

Пусть $x = [x^1, \ldots, x^m]$, $h = [h^1 \ldots h^m$, тогда

$$A(x)h = a_1(x)h^1 + \cdots + a_m(x)h^m = (a_1(x) \ldots a_m(x)) \begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^m \end{pmatrix}$$

[2]Например $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, но можно $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

В $\mathbb{R}^m$ длиной вектора h можно считать любую из возможных норм.

Запишем изменение функции:

$$f([x^1+h^1,\ldots,x^m+h^m])-f([x^1\ldots x^m])=(a_1(x),\ldots,a_m(x))\begin{pmatrix} h^1 \\ \cdots \\ h^m \end{pmatrix}+o(h)$$

Рассматривая смещения $h_{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} (0,\ldots,h^i,\ldots,0)$, можем найти

$$a_i(x)=\lim_{h^i\to 0}\frac{f([x^1,\ldots,x^i+h^i,\ldots,x^m])-f([x^1,\ldots,x^m])}{h^i},$$

где $a_i(x)$ — *частные производные* функции по i-той переменной. Они обозначаюися $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$, $\partial_i f(x)$.

Таким образом получаем, что

$$f([x^1+h^1,\ldots,x^m+h^m])-f([x^1\ldots x^m])=d_1f(x)h^1+\ldots+d_mf(x)h^m+o(h),$$

где $o(h)$ понимается в смысле длины, выбранной в $\mathbb{R}^m$.

Пусть и m, и n больше 1, т.е. имеем функцию $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$.

Можно представить

$$f(x)=\begin{cases} f^1 & ([x^1 \quad \ldots \quad x^m]) \\ & \qquad \ldots \\ f^n & ([x^1 \quad \ldots \quad x^m]) \end{cases}$$

Тогда выражение для дифференциала $A(x):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ таково:

$$\begin{pmatrix} \Delta^1 \\ \vdots \\ \Delta^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^m \\ & \cdots & \\ a_n^1 & \ldots & a_n^m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^m \end{pmatrix}=f'(x)\begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^m \end{pmatrix},$$

где

$$f'(x)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}$$

Вообще говоря, функция f может и не быть непрерывной, но ее частные производные могут существовать.