Непрерывность линейной функции.

Определение. Нормой *линейного отображения* $A : X \to Y$ *называется*

$$\|A\| \stackrel{def}{=} \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$$

Геометрический смысл нормы линейного отображения состоит в том, что она задает наибольшую величину растяжения вектора при этом отображении: для любого x выполнено $|Ax| \leq \|A\| \cdot |x|$.

Для того, чтобы линейное отображение было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы $\|A\| < \infty$.

Таким образом, если линейная функция непрерывна в некоторой точке, то она непрерывна всюду. Заметим также, что норма $\|A\|$ линейного преобразования (непрерывного) является нормой в пространстве $L(X, Y)$ всех непрерывных линейных отображений из X в Y.

Когда говорится о дифференцируемых функциях, линейное приближение $f'(x)$ будет непрерывным. Тогда дифференцируемая функция всегда будет непрерывной.

Дифференцирование — наилучшая линейная аппроксимация в некоторой окрестности точки.

Дифференцирование обратной функции.

$$f : U(x) \to V(y)$$
$$y = f(x)$$
$$f^{-1} : V(y) \to U(x)$$

Теорема. *Пусть* f, f^{-1} *— пара взаимно обратных отображений, при этом* f *непрерывно в точке* x, f^{-1} *непрерывно в точке* $y = f(x)$.

Если при этом отображение f *дифференцируемо в точке* x, *причем* $f'(x)$ *имеет обратное* $(f'(x))^{-1}$, *и оно непрерывно, то* f^{-1} *дифференцируемо в точке* $y = f(x)$ *и справедливо равенство:*

$$(f^{-1})'(y) \quad = \quad (f'(x))^{-1}$$

Доказательство. Имеет место представление $f(x+h)-f(x) = f'(x)h + o(h)$. Необходимо доказать представление $f^{-1}(y+t) - f^{-1}(y) = A(y)t + o(t)$, где обозначено $A = (f'(x))^{-1}$. Положим:

$$t = f(x+h) - f(x),$$

тогда можно записать:

$$f^{-1}(y) = x, \quad f^{-1}(y+t) = x+h, \quad h = f^{-1}(y+t) - f^{-1}(y)$$

Запишем t в виде $t = f'(x)h + o(h)$. Тогда имеем

$$h = (f'(x))^{-1}\, t - (f'(x))^{-1}\, o(h),$$

а учитывая непрерывность $(f'(x))^{-1}$, получаем:

$$h = (f'(x))^{-1}\, t + o(h) \tag{1}$$

Из неравенства $|a| - |b| \leq |a+b|$ следует, что при достаточно малых h

$$\frac{1}{2} \leq |h + o(h)| \leq \|\,(f'(x))^{-1}\,\| |t| \tag{2}$$

Тогда $|h| \leq (f'(x))^{-1}\, |t|$. Значит, $h = O(t)$; таким образом $o(h) = o(t)$ (т.к. обе функции непрерывны, то $h \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$).

Поэтому из (1) следует искомое представление

$$h = (f'(x))^{-1}\, t + o(t)$$

Эта теорема сводит задачу дифференцирования обратной функции к отысканию обратного отображения к заданному линейному отображению, что в координатной записи соответствует нахождению обратной матрицы.

Примеры.

Линейность дифференцирования:

$$d(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 df_1 + \lambda_2 df_2.$$

- Функция A — линейная.

  $$A(x+h) - A(x) = (Ax + Ah) - Ax = Ah$$

  Значит, $A'(x) = A$.

- $L(x_1, \dots, x_n)$ — полилинейная функция. Как дифференцировать полилинейную функцию?

  $$\begin{aligned}&dL(x_1, \dots, x_n)(h_1, \dots, x_n) = \\ &L(h_1, x_2, \dots, x_n) + L(x_1, h_2, \dots, x_n) + \dots + L(x_1, x_2, \dots, h_n) = \\ &\left(L(dx_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + L(x_1, x_2, \dots, dx_n)\right)(h_1, \dots, h_n)\end{aligned}$$

- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Рассмотрим комплексную линейную функцию $L_{\mathbb{C}} : z \mapsto w = kz,\ k, z \in \mathbb{C}$. Можно записать ее как линейное отображение $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$:

  $$\left.\begin{array}{c} z = x + iy \\ w = u + iv \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (x, y) \mapsto (u, v)$$

  Упражнение 0.1. *Найти условие на матрицу вещественного линейного преобразования, соответствующего комплексному линейному преобразованию.*

- Дифференцирование комплексных функций.

  $$f(z+h) - f(z) = f'(z)h + o(h)$$

  Запишем $f(z) = u + iv$ и поставим в соответствие $f(z)$ пару вещественных функций; пусть они дифференцируемы.

  $$\left\{\begin{array}{l} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{array}\right. \quad \text{Матрица Якоби:} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

  При каких условиях на u и v соответствующая комплексная функция будет дифференцируема?

  Ответ: при условиях Коши-Римана:

  $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Производная по вектору и градиент.

Представьте, что Вы едете в вагоне по земному шару. Траектория вагона задается функцией $x = x(t)$. Температура на Земле в разных точках различна. Пусть она задается функцией $f(x)$. Тогда функция $f(x(t))$ задает изменение температуры в Вашем вагоне.

Найдем скорость изменения температуры в вагоне. Для этого нужно знать скорость движения $v(t) = v = x'(t)$:

$$\frac{df(x(t))}{dt} = f'(x(t)) \cdot x'(t) = f'(x) \cdot v$$

Определение. Производная функции f в точке x по вектору v — *это*

$$D_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+vt) - f(x)}{t}$$

Если $f'(x)$ существует, то

$$D_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f'(x)vt + o(vt)}{t} = f'(x)v$$

Если e_i – единичный вектор i-того координатного направления, то $D_{e_i} f(x) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$.

! Наличие производной по любому направлению не означает, что функция дифференцируема. Пример:

$$f(z) = \begin{cases} 1, & \text{при } z \neq 0 \text{ и } |z-i| = 1; \\ \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определение. *Вектор, соответствующий дифференциалу функции* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *в точке* x, *называется* градиентом *функции в этой точке и обозначается* $\operatorname{grad} f(x)$.

Таким образом. имеем:

$$f'(x)v = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x)v^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x)v^n = \langle \operatorname{grad} f(x), v \rangle = |\operatorname{grad} f(x)||v| \cos\varphi.$$

Таким образом, если $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$ и $e = \frac{\operatorname{grad} f(x)}{|\operatorname{grad} f(x)|}$, то производная $D_e f(x)$ принимает наибольшее значение. То есть скорость роста функции f при движении из точки x максимальна, кода направление движения совпадает с направлением градиента функции в этой точке. Скорость изменения функции при движении в направлении, перпендикулярном вектору градиента, равна 0.

Если нарисовать на плоскости *линии уровня* функции $f(x, y)$ (т.е. кривые вида $f(x, y) = \text{const}$), то градиент в данной точке будет перпендикулярен линии уровня и указывает путь к вершине:

Векторное поле называется *потенциальным*, если оно является градиентом некоторой функции (по традиции, она берется с обратным знаком):

$$F(x) = -\text{grad}\ U(x)$$

В частности, потенциальным является поле тяготения, подчиняющееся закону Ньютона: $F(x) \sim -x/|x|^3$ (притягивающая точка — в начале координат). Его потенциалом является функция $1/|x|$. Найти потенциал можно следующим способом. Выберем A и будем рассматривать пути из A в B: $x = x(t) : a \leq t \leq b$; $x(a) = A, x(b) = B$. *Работой* назовем интеграл

$$\mathcal{A} = \int_a^b \langle F(x(t)), \dot{x} \rangle (t) dt$$

Если поле потенциально, то $\mathcal{A} = U(B) - U(A)$ и не зависит от выбора пути.