Теорема о неявной функции

Итерационные методы решения уравнений. Сжимающие отображения. Принцип неподвижной точки. Теорема о неявной функции.

1. Постановка вопроса.

Соотношение $F(x, y) = 0$ указывает на определенную зависимость между переменными x и y. Однако, в отличие, например, от явной формы функциональной зависимости $y = f(x)$, в форме $F(x, y) = 0$ эта зависимость, как говорят, задана неявно.

При каких условиях уравнение $F(x, y) = 0$ разрешимо относительно одной из переменных, пусть это будет y, как найти явную зависимость $y = f(x)$ и какими свойствами, кроме очевидного $F(x, f(x)) = 0$, обладает эта неявно заданная функция $y = f(x)$ — вот вопросы, на которые в определенной степени отвечает теорема о неявной функции.

Случай линейной зависимости $ax + by + c = 0$ (где $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, а матрицы a, b имеют размеры $n \times m$ и $n \times n$ соответственно) подробно рассматривался в алгебре и нам известно, что если b обратима (т.е. если существует b^{-1}), то это соотношение равносильно явной зависимости $y = -b^{-1}(ax + c)$.

Уже простейшее нелинейное соотношение $x^2 + y^2 - 1 = 0$, задающее окружность на плоскости $\mathbb{R}^2$, показывает с какими новыми вопросами придется столкнуться. решить это уравнение относительно y, конечно, можно, $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ при $|x| \leq 1$. Однако, одному значению $x \neq \pm 1$ отвечают два значения y. Если считать, что выбор любого из них в нашей власти, то, выбирая произвольно то одно, то другое, из них можно создать бесконечно много различных функций $y = f(x)$ которые будут удовлетворять исходному соотношению $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Поэтому наше уравнение $F(x, y) = 0$ в целом не равносильно никакому функциональному соотношению $y = f(x)$.

Однако, если посмотреть на участок окружности в небольшой окрестности какой-нибудь ее точки (посмотреть через небольшое окошко, см. рис. 1), то в пределах окошка кривая, заданная уравнением $F(x, y) = 0$, очевидно является графиком некоторой функции $y = f(x)$ (если мы не около точек $(\pm 1, 0)$) или функции $x = x(y)$ (если мы не в окрестности точек $(0, \pm 1)$).

Рис. 1.

Итак, можно (если не сказать, нужно) рассматривать задачу разрешимости локально.

От чего зависит, когда уравнение $F(x, y) = 0$ около точки (x_0, y_0), где $F(x_0, y_0) = 0$, разрешимо относительно той или иной из переменных x, y?

Считая F дифференцируемой функцией и учитывая, что

$$\begin{gathered} F(x, y) = F(x, y) - F(x_0, y_0) = \\ = F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(|x - x_0| + |y - y_0|), \end{gathered}$$

в малой окрестности точки (x_0, y_0), заменим уравнение $F(x, y) = 0$ почти равносильным ему уравнением

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

задающим касательную к нашей кривой в этой точке. Если существует $\left(F'_y(x_0, y_0)\right)^{-1}$, то последнее уравнение разрешимо относительно y, а если существует и $(F'_x(x_0, y_0))^{-1}$, то и относительно x. Поскольку кривая и касательная близки около точки касания, можно ожидать (и эти ожидания оправдываются), что, например, условие существования $(F'_y)^{-1}$ будет достаточным признаком того, что соотношение $F(x, y) = 0$ в окрестности рассматриваемой точки равносильно некоторой функциональной зависимости $y = f(x)$, т.е. в пределах малого окошка кривая $F(x, y) = 0$ является графиком функции $y = f(x)$.

Вот, собственно, и все ключевые наблюдения той, тем не менее, весьма употребительной теоремы, к которой мы переходим. Учитывая ее разнообразные приложения, мы дадим достаточно развернутое (сепарированное) ее доказательство, в котором будет видна анатомия зависимости свойств функции f от свойств исходной функции F.

2. Некоторые замечания о численных методах решения уравнений.

Фиксировав в соотношении $F(x,y)=0$ одну из переменных, мы получаем уравнение относительно другой, поэтому сначала полезно вообще научиться решать уравнение $f(x)=0$.

a) В зависимости от свойств функции f предлагаются и способы решения.

Например, если f — вещественнозначна, непрерывна и на концах отрезка $[a,b]$ принимает значение разных знаков, то, мы знаем, что на этом отрезке есть по крайней мере один корень уравнения $f(x)=0$ и его можно искать последовательным делением отрезка. Разделив отрезок пополам, мы либо попадаем в корень, либо находим вдвое меньший отрезок, на концах которого функция имеет значения разных знаков. Продолжая процесс деления, получим последовательность (концов отрезков), которая сходится к корню уравнения (докажите!).

b) Если f — гладкая выпуклая функция, то следуя Ньютону, можно предложить значительно более эффективный в смысле скорости сходимости алгоритм отыскания единственного в этом случае корня (см. рис. 2).

Рис. 2.

Метод Ньютона или метод касательных состоит в следующем. Строим касательную в точке x_0, находим точку x_1, ее пересечения с осью абсцисс и, повторяя процесс, получаем рекуррентным соотношением

$$x_{n+1}=x_n-(f'(x_n))^{-1}f(x_n) \tag{1}$$

последовательность точек быстро сходящуюся к корню. (Оцените скорость сходимости. Получите соотношение $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+a/x_n)$, позволяющее искать положительный корень уравнения $x^2-a=0$, $a>0$.

Найдите $\sqrt{2}$ по этой формуле с нужной вам точностью и проследите сколько дополнительных знаков появляется на каждом шагу).

c) Соотношение (1) можно переписать в виде

$$x_{n+1} = g(x_n) \tag{2}$$

где $g(x) = x-(f'(x))^{-1}f(x)$. Тем самым отыскание корня уравнения $f(x)$ сводится к отысканию *неподвижной точки* отображения g, т.е. такой точки, что

$$x = g(x) \tag{3}$$

Эта редукция относится не только к методу Ньютона. В самом деле, уравнение $f(x) = 0$ равносильно уравнению $\lambda f(x) = 0$, (если существует λ^{-1}), а последнее равносильно уравнению $x = x + \lambda f(x)$. Полагая $g(x) = x + \lambda f(x)$ (здесь λ может быть и переменной величиной), приходим к уравнению (3).

Процесс решения уравнения (3), т.е. отыскания неподвижной точки отображения g в соответствии с рекуррентной формулой (2), когда найденное на предыдущем шаге значение функции становится ее аргументом на следующем шаге, называется *итерационным процессом* или *методом итераций*. Этот циклический процесс удобен для реализации на компьютере.

Геометрическая его иллюстрация приведена на рисунках 3 и 4.

Рис. 3. Рис. 4. Рис. 5.

Заметим, что если график функции g идет покруче, чем то, что изображено на рисунках 3 и 4, то картина может измениться, как показывает например, рис. 5.

Если же итерационный процесс (2) ведется в области, где $|g'(x)| \leq q < 1$, то последовательность

$$
\begin{aligned}
&x_0,\\
&x_1 = g(x_0),\\
&x_2 = g(x_1) = g^2(x_0), \dots,\\
&x_{n+1} = g(x_n) = g^n(x_0), \dots
\end{aligned}
$$

всегда оказывается фундаментальной (последовательностью Коши). В самом деле, применяя теорему о конечном приращении, имеем

$$|x_{n+1} - x_n| \le q|x_n - x_{n-1}| \le \ldots \le q^n|x_1 - x_0|, \tag{4}$$

откуда, применяя неравенство треугольника, находим

$$
\begin{aligned}
|x_{n+m} - x_n| &\le |x_n - x_{n+1}| + \cdots + |x_{n+m-1} - x_{n+m}| \le \\
&\le (q^n + \cdots + q^{n+m-1})|x_1 - x_0| \le \tfrac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|
\end{aligned} \tag{5}
$$

Полезно заметить, что при $m \to \infty$ из последнего неравенства получаем оценку

$$|x - x_n| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \tag{6}$$

уклонения x_n от неподвижной точки x.

3. Принцип неподвижной точки.

Последние рассуждения (относящиеся к формулам (3)-(6)), очевидно, можно повторить в любом метрическом пространстве, в котором действует критерий Коши, т.е. где любая фундаментальная последовательность является сходящейся. такие метрические пространства называются *полными метрическими пространствами.* например $\mathbb{R}$ — полное метрическое пространство по отношению к стандартному расстоянию $d(x', x'') = |x' - x''|$ между точками $x', x'' \in \mathbb{R}$. Отрезок $I = \{x \in \mathbb{R} : |x| \le 1\}$ — также полное метрическое пространство относительно этой метрики. А если из $\mathbb{R}$ или из I удалить точку, то полученное метрическое пространство, очевидно, не будет полным.

Задача. 1. Проверьте полноту пространств $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n$.

2. Покажите, что замкнутый шар $B(a, r) = \{x \in X : d(a, x) \le r\}$ радиуса r с центром $a \in X$ в полном метрическом пространстве (X, d) сам является полным метрическим пространством относительно индуцированной вложением $B \subset X$ метрики d.

Дадим еще следующее определение.

Определение. *Отображение $g : X \to Y$ одного метрического пространства (X, d_X) в другое (Y, d_Y) называется* сжимающим, *если существует число $q \in [0, 1)$ такое, что для любых двух точек $x', x'' \in X$,*

$$d_Y(g(x'), g(x'')) \leq d(x', x'')$$

Например, если дифференцируемая функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что всюду $|g'(x)| \leq q < 1$, то по теореме в конечном приращении $|g(x') - g(x'')| \leq q|x' - x''|$ и g осуществляет сжимающее отображение. Это же можно сказать и по отношению к дифференцируемому отображению $g : B \to Y$, выпуклого подмножества B нормированного пространства X (например, шара $B \subset \mathbb{R}^n$) в нормированное пространство Y, если $\|g'(x)\| \leq q$ в любой точке $x \in B$.

Теперь мы можем сформулировать следующий *принцип неподвижной точки.*

> Сжимающее отображение $g : X \to X$ полного метрического пространства в себе имеет и притом единственную неподвижную точку x.
>
> Эта точка может быть найдена итерационным процессом $x_{n+1} = g(x_n)$, начиная с любой точки $x_0 \in X$.
>
> Скорость сходимости и оценка погрешности приближения даются неравенством
>
> $$d(x, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0). \qquad (6')$$

Доказательство этого утверждения было дано выше при выводе формул (4)-(6), где теперь вместо $\|x' - x''\|$ всюду надо писать $d(x', x'')$.

Чтобы оценить пользу и масштаб действия сделанного обобщения рассмотрим следующий важный *пример.*

Имеется функция $y = y(x)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $y' = f(x, y)$ и начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Пользуясь формулой Ньютона-Лейбница, перепишем задачу в виде следующего интегрального уравнения относительно неизвестной функции $y(x)$:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \qquad (7)$$

Справа стоит некоторое преобразование g, которое делается над функцией $y(x)$ и мы ищем неподвижную "точку" — функцию преобразования g.

Пусть, например, $f(x, y) = y$, $x_0 = 0$, а $y_0 = y(t)$. Тогда речь идет о решении уравнения $y' = y$ с начальным условием $y(0) = 1$, а (7) принимает вид

$$y(x) = 1 + \int_0^x y(t)dt. \tag{8}$$

Проведем итерационный процесс, начиная, положим, с функции $y_0(x) \equiv 0$. При этом последовательно получаем

$$\begin{aligned}
y_1(x) &\equiv 1, \\
y_2(x) &= 1 + \int_0^x y_1(t)dt = 1 + x, \\
y_3(x) &= 1 + \int_0^x y_2(t)dt = 1 + \int_0^x (1+t)dt = 1 + x + \frac{1}{2}x^2, \\
&\vdots \\
y_n(x) &= 1 + \frac{1}{1!}x + \ldots + \frac{1}{n!}x^n, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Видно, что мы идем к функции $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$.

Задача. Покажите, что если $\|f(x,y_1) - f(x,y_2)\| \le M\|y_1 - y_2\|$, то в окрестности точки x_0 итерационный процесс применим и в случае общего уравнения (7).

Именно так Пикар (Emile Picard , 1856-1941) искал решение дифференциального уравнения $y'(x) = f(x, y(x))$, с начальным условием $y(x_0) = y_0$, как неподвижную точку преобразования (7).

Банах (Banach, 1982-1945) сформулировал принцип неподвижной точки в приведенной выше абстрактной форме, в которой он часто называется *принципом Банаха неподвижной точки*, или *принципом Пикара-Банаха.* Истоки его, однако, как мы видели, можно связывать с Ньютоном.

4. Формулировка и доказательство теоремы о неявной функции.

Вернемся теперь к основному объекту нашего рассмотрения и покажем, что справедлива следующая *теорема о неявной функции.*

Теорема. *Пусть X, Y, Z — нормированные пространства (например, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ или, даже, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$), причем Y — полное пространство относительно метрики, индуцированной нормой.*

Пусть $F: W \to Z$ — отображение, определенное в окрестности W точки $(x_0, y_0) \in X \times Y$, непрерывное в (x_0, y_0) вместе с частной производной $F'_y(x, y)$, которая предполагается существующей в W.

Если $F(x_0, y_0) = 0$ и при этом существует $(F'_y(x_0, y_0))^{-1}$ (и $\|(F'_y(x_0, y_0))^{-1}\| < \infty$), то найдутся окрестность $U = U(x_0)$ точки x_0 в X, окрестность $V = V(x_0)$ точки y_0 в Y и такая функция $f : U \to V$, непрерывная в x_0, что $U \times V \subset W$ и

$$(F(x, y) = 0 \text{ в } U \times V) \Longleftrightarrow (y = f(x),\ x \in U) \tag{9}$$

Доказательство. Без ограничения общности и для сокращения записи будем считать, что $(x_0, y_0) = (0, 0)$, чего всегда можно добиться перейдя к новым переменным $x - x_0$ и $y - y_0$.

При фиксированном x будем решать уравнение $F(x, y) = 0$ относительно y. Решение будем искать как неподвижную точку отображения

$$g_x(y) = y - (F'_y(0, 0))^{-1} F(x, y) \tag{10}$$

— это упрощенный вариант формулы Ньютона (1), когда коэффициент λ (см. абзац после формулы (3)) постоянен. Непосредственно видно, что $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow g_x(y) = y$.

Отображение (10) является сжимающим, если x и y близки к 0 в X и Y. В самом деле

$$\frac{dg_x}{dy}(y) = E - (F'_y(0, 0))^{-1} F'_y(x, y) \tag{11}$$

Здесь E — тождественное (единичное) отображение, а поскольку $F'_y(x, y)$ непрерывно в точке (0,0), то найдется число $\Delta \in \mathbb{R}$ такое, что при $\|x\| < \Delta$ и $\|y\| < \Delta$

$$\|\frac{dg_x}{dy}\| < \frac{1}{2}. \tag{12}$$

Заметим, наконец, что при любом $\varepsilon \in]0, \Delta[$ найдется $\delta \in]0, \Delta[$ такое, что если $\|x\| < \delta$, то отображение g_x переводит отрезок (шарик) $\|x\| \le \varepsilon$ в себя.

Действительно, ведь $F(0, 0) = 0$, значит, в силу (10), и $g_0(0) = 0$. Ввиду непрерывности F в точке (0,0) из (10) следует, что найдется число $\delta \in]0, \Delta[$ такое, что $\|g_x(0)\| < \frac{1}{2}\varepsilon$ при $\|x\| < \delta$.

Итак, при $\|x\| < \delta$ отображение $g_x : B(\varepsilon) \to Y$ отрезка (шара) $B(\varepsilon) = \{y \in Y | \|y\| \le \varepsilon\}$ смещает его центр не более, чем на $\frac{1}{2}\varepsilon$ при этом, в силу (12), сжимая $B(\varepsilon)$ по крайней мере вдвое. Значит, $g_x(B(\varepsilon)) \subset B(\varepsilon)$ при $\|x\| < \delta$.

По условия Y — полное пространство, поэтому и $B(\varepsilon) \subset Y$ тоже полное метрическое пространство (относительно индуцированной метрики).

Тогда, в силу принципа неподвижной точки, найдется, и притом единственная, точка $y = f(x) \in B(\varepsilon)$, неподвижная при отображении $g_x : B(\varepsilon) \to B(\varepsilon)$.

Тем самым при любом x таком, что $\|x\| < \delta$, мы нашли, и притом единственное в пределах $B(\varepsilon)$ значение $y = f(x)$ ($\|f(x)\| < \varepsilon$) такое, что $F(x, f(x)) = 0$ (см. Рис. 6; сечение области $P = \{(x,y) \in X \times Y \| \|x\| < \delta,\ \|y\| < \varepsilon$ через точку x дает отрезок (шарик $B(\varepsilon)$, в котором и находится соответствующая неподвижная точка $y = f(x)$).

Рис. 6.

Итак, показано, что

$$(F(x,y) = 0 \text{ при } \ \|x\| < \delta \text{ и } \ \|y\| < \varepsilon) \Longleftrightarrow (y = f(x), \text{ где } \ \|x\| < \delta \quad (13)$$

Заметим, что мы не только получили соотношение (9), но, в силу конструкции, по любому $\varepsilon \in]0, \Delta[$ умеем подбирать $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось 13). Поскольку функция f уже найдена и фиксирована, это означает и то, что $f(0) = 0$, и то, что f непрерывна при $x = 0$.

Доказанную теорему можно рассматривать как теорему существования неявной функции $y = f(x)$.

Посмотрим теперь какие свойства функции F и как наследуются функцией f.

> *Непрерывность неявной функции.* Если в дополнение к условиям теоремы известно, что функции F, F'_y непрерывны не только в точке (x_0, y_0), но и в некоторой ее окрестности, то и неявная функция f непрерывна в некоторой окрестности x_0.

Действительно, в этом случае условия теоремы окажутся выполненными во всех близких к (x_0, y_0) точках множества $F(x,y) = 0$ и каждую из них можно было бы рассматривать как исходную (x_o, y_0). Функция же f уже найдена и фиксирована.

Внимание! Вспомните задачу: если отображение $A \to A^{-1}$ (например, для матриц A) определено в A, то определено и в окрестности A.

> *Дифференцируемость неявной функции.* Если в дополнение к условиям теоремы известно, что функция F дифференцируема в точке (x_0, y_0), то неявная функция f дифференцируема в точке x_0, причем
>
> $$f'(x_0) = -(F'_y(x_0, y_0))^{-1} F'_x(x_0, y_0) \qquad (14')$$

Доказательство. Учитывая дифференцируемость F в точке (x_0, y_0), можно написать, что

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) =$$
$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0) + o(|x - x_0| + |y - y_0|)$$

полагая для упрощения записи $(x_0, y_0) = (0, 0)$ и считая, что мы перемещаемся только вдоль кривой $y = f(x)$, получаем

$$0 = F'_x(0, 0)x + F'_y(0, 0)y + o(|x| + |y|).$$

или

$$y = -(F'_y(0, 0))^{-1} F'_x(0, 0)x - (F'_y(0, 0))^{-1} o(|x| + |y|). \qquad (16)$$

Поскольку $y = f(x) = f(x) - f(0)$, то формула (14) будет оправдана, если мы покажем, что при $x \to 0$ второй член суммы в правой части есть $o(x)$.

Но

$$|(F'_y(0, 0))^{-1} o(|x| + |y|)| \leq \|(F'_y(0, 0))^{-1}\| |o(|x| + |y|)| = o(|x| + |y|).$$

Далее,

$$\| - (F'_y(0, 0))^{-1} F'_x(0, 0)\| \leq \|(F'_y(0, 0))^{-1} F'_x(0, 0)\| = a < \infty,$$

поэтому из (15) получаем, что $|y| \leq a|x| + \alpha(|x| + |y|)$, где $y = f(x) \to 0$ и $\alpha = \alpha(x) \to 0$ при $x \to 0$.

Значит,

$$|y| \leq \frac{a + \alpha}{1 - \alpha}|x| < 2a|x|$$

при x, достаточно близких к 0. Учитывая это, из (15) получаем, что при $x \to 0$

$$f(x) = -(F'_y(0,0))^{-1} F'_x(0,0)x + o(x).$$

А это с учетом $f(0) = 0$, дает (14).

Непрерывная дифференцируемость неявной функции. Если в дополнение к условиям теоремы известно, что функции F'_x и F'_y определены и непрерывны в окрестности точки (x_0, y_0), то и неявная функция f непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0.

Короче говоря, если $F \in C^{(1)}$, то и $f \in C^{(1)}$.

Доказательство. В этом случае условия дифференцируемости f и формула (14) оказываются выполнены не только в (x_0, y_0), но и во всех точках "кривой" $F(x, y) = 0$, близких к (x_0, y_0). (См. выше предостерегающее *"Внимание!"*). Тогда в некоторой окрестности точки x_0 в соответствии с формулой (14)

$$f'(x) = -(F'_y(x, f(x)))^{-1} F'_x(x, f(x)) \quad (14')$$

откуда видно, что f' — непрерывна.

Внимание! Вспомните, что отображение $F \to F^{-1}$ непрерывно.

Высшие производные неявной функции.

Если в дополнение к условиям теоремы известно, что функция F принадлежит классу $C^{(k)}$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), то и f принадлежит классу $C^{(k)}$ в окрестности x_0.

Доказательство. Пусть, например, $F \in C^{(2)}$. Поскольку $f \in C^{(1)}$, то правую часть равенства $(14')$ можно продифференцировать в соответствии с правилом дифференцирования композиции функций. Получается формула для $f''(x)$, из которой следует непрерывность $f''(x)$.

Более того, как в формуле $(14')$ для $f'(x)$ справа участвуют первые частные производные F и сама функция f (но на f'), так и в формуле для $f''(x)$ участвуют вторые частные производные F и функции f, f' (но на f'').

Значит, если $F \in C^{(3)}$, то $f''(x)$ снова можно дифференцировать и мы снова приходим к формуле, теперь уже для $f'''(x)$, в которой участвуют третьи частные производные F, а также производные функции f (f, f', f'') только меньшего порядка.

По индукции получаем то, что и утверждалось.

Внимание! Вспомните, что отображение $A \to A^{-1}$ дифференцируемо и даже бесконечно дифференцируемо.

Задача. 1. Найдите $f''(x)$ (т.е. выпишите формулу для вычисления $f''(x)(h_1, h_2)$ при заданных векторах смещения h_1, h_2).

2. Как выглядит (упрощается) формула для $f''(x)$ в случае, когда x, y и $z = F(x, y)$ — числовые вещественные или комплексные переменные?

Задача (Метод неопределенных коэффициентов). Зная первые (или все) коэффициенты ряда Тейлора функции F, найдите первые (или все) коэффициенты ряда Тейлора неявной функции f.

Задача. 1. Запишите в координатной форме формулировку теоремы о неявной функции для случая $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, когда $m = n = 1$ и когда $n > 1$.

2. Пусть $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \quad (m > n)$ линейное отображение максимального ранга $(= n)$. Какова размерность подпространства $F^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^m$ и какова его коразмерность? Пусть теперь $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \quad (m > n)$ произвольное гладкое отображение, $F(0) = 0$ и $\mathrm{rang} F'(x) = n$. Ответьте на те же вопросы ($\dim F^{-1}(0) =?$, , $\mathrm{codim} F^{-1}(0) =?$) в отношении множества $F^{-1}(0)$.