Математический колледж НМУ
Экзамен по теории вероятностей. 3 курс, 1 семестр. 26 февраля 1994г.

---

1. *(5)* В урне находятся a белых и b черных шаров. Шары по одному без возвращения извлекаются из урны. Найти вероятность того, что k-тый шар оказался белым.

2. *(5)* На окружности наудачу бросается 3 точки: A, B, C. Найти вероятность того, что треугольник ABC будет остроугольным.

3. *(5)* Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и каждая из них имеет нормальное распределение. Доказать, что $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ независимы.

4. *(7)* Дана последовательность $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots \xi_n \ldots$ случайных величин, такая что $D\xi_k < C$ и $R_{ij} \to 0$ при $|i-j| \to \infty$ (R_{ij} — коэффициенты корреляции между ξ_i и ξ_j). Доказать, что к данной последовательности применим закон больших чисел.

5. *(6)* Случайная величина ξ_λ имеет распределение Пуассона с параметром λ. Доказать, что распределение случайной величины $\left(\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$ слабо сходится к N(0,1) (нормальному распределению со средним 0 и дисперсией 1).

6. *(8)* Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, каждая из которых имеет распределение N(0,1) (см. пред. задачу). Обозначим через A_n событие, заключающееся в том, что

$$\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n > a(2n \ln n)^{1/2}$$

где a — фиксированная постоянная. Доказать, что при $a > 1$ с вероятностью 1 осуществляется лишь конечное число событий A_n.

7. *(7)* Пусть ξ — случайная величина с непрерывной функцией распределения, η — произвольная случайная величина. Можно ли найти такую функцию $f(\cdot)$, что функция распределения случайной величины $f(\xi)$ совпадает с функцией распределения случайной величины η?

8. *(8)* Рассмотрим случайное блуждание на одномерной целочисленной решетке Z^1 с показательно распределенным шагом. Это означает, что вероятность перехода $p(x, y)$ из точки x в точку y определяется следующим образом: $p(x, y) = 0$, если $y - x \leq 0$, и $p(x, y) = (1-p)p^{k-1}$, если $y - x = k > 0$. Зафиксируем некоторую точку $a \in Z^1$ и рассмотрим траекторию описанного случайного блуждания, выходящую из нуля. Пусть ξ — ближайшая к a и лежащая справа от a точка траектории. Найти распределение вероятностей длины отрезка $[a, \xi]$.

9. *(6)* Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы м распределены по Пуассону с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Найти условное распределение случайной величины ξ_1 при условии, что $\xi_1 + \xi_2$ фиксирована.

10. *(6)* Показать, что система условных распределений Гиббса в конечных объемах — согласованная система распределений, т.е. если $W \subset V$, $|V| < \infty$, то

$$p_V(\sigma(W)|\sigma(V-W|\sigma(Z^d \backslash V)) = p_W(\sigma(W)|\sigma(Z^d \backslash W)),$$

где $\sigma(Z^d \backslash W)$ совпадает с $\sigma(Z^d \backslash V)$ вне V и с $\sigma(V-W)$ вне W.

11. *(6)* Пусть ξ — случайная величина с вещественной характеристической функцией $f(t)$ и дисперсией σ^2. Доказать, что

$$f(t) \geq 1 - \frac{t^2\sigma^2}{2}.$$

12. *(6)* Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых случайных величин, каждая из которых принимает значения ± 1 с вероятностью $1/2$. Положим $x^{(n)} = (\xi_n + \xi_{n+1})/2$. Показать, что $\{x^{(n)}\}$ не образуют цепи Маркова.

13. *(8)* Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m \ldots$ независимы и равномерно распределены на отрезке $[0,1]$. Пусть ν — случайная величина, равная тому k, при котором впервые сумма

$$s_k = \xi_1 + \cdots + \xi_k$$

превосходит 1. Доказать, что математическое ожидание $\mathsf{E}\nu = e$.

14. *(8)* Два отростка растут из одного корня по следующему правилу: в каждый следующий момент времени увеличивается на единицу длина одного из отростков, причем вероятность удлинения данного отростка пропорциональна его длине, т.е. если $l_1(i)$ и $l_2(i)$ — длины отростков в момент времени i, то

$$\begin{array}{lll} (l_1(i+1) = l_1(i)+1; l_2(i+1) = l_2(i)) & \text{с вероятностью} & l_1(i)/(l_1(i)+l_2(i)) \\ (l_1(i+1) = l_1(i); l_2(i+1) = l_2(i)+1) & \text{с вероятностью} & l_2(i)/(l_1(i)+l_2(i)) \end{array}$$

В начальный момент времени $l_1(0) = l_2(0) = 1$. Показать, что в пределе $n \to \infty$ распределения случайных величин $\frac{l_1(n)}{n}$, $\frac{l_2(n)}{n}$ сходятся к равномерному распределению на отрезке $[0,1]$.

15. *(9)* В урне имеется m белых и n шаров $(m > n)$. Из урны последовательно извлекается по одному шару. Найти вероятность того, что наступит такой момент времени, что число извлеченных шаров будет содержать одинаковое число шаров разного цвета.