МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ НЕЗАВИСИМОГО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Задачи экзамена по курсу "Римановы поверхности", 2 курс, 4-ый семестр. 21.05.1995.

Задача 1. (4) Пусть X – риманова поверхность рода 2, $A_1, A_2, B_1.B_2$ – канонический базис циклов, ω_1, ω_2 – базис в пространстве голоморфных дифференциальных форм. Пусть $P = (P_A \ P_B)$ – матрица периодов, т.е.

$$(P_A)_{ij} = \int_{A_j} \omega_i,\ (P_B)_{ij} = \int_{B_j} \omega_i. \text{ Может ли матрица } P \text{ иметь вид: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+i & 1+i \\ 0 & 1 & i & 1 \end{pmatrix}?$$

Задача 2. (12) Могут ли все голоморфные дифференциалы обращаться в 0 в некоторой точке x римановой поверхности X?

Задача 3. Пусть $f : X \to X$ – отображение римановой поверхности X в себя, не равное тождественно $const$.

(a) (5) Приведите примеры для поверхностей рода $0, 1$, когда f не автоморфизм X.

(b) (5) Докажите, что если род $X \geq 2$, то $f \in AutX$.

Задача 4. (14) Пусть $X = \mathbb{C}/L$ – эллиптическая кривая, а $\wp(z)$ – пе-функция Вейерштрасса. Докажите, что следующие условия эквивалентны

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \wp(z_0) & \wp(z_1) & \wp(z_2) \\ \wp'(z_0) & \wp'(z_1) & \wp'(z_2) \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow z_0 + z_1 + z_2 \equiv 0 \ (mod\ L)$$

Задача 5. Пусть $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus 0$, а $G_\lambda = \{\lambda^n \mid \lambda \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z}\}$ – группа, действующая на $\mathbb{C}^*$ умножением.

(a) (10) При каких λ $\mathbb{C}^*/G_\lambda$ – риманова поверхность? Каков ее род?

(b) (5) Изоморфны ли поверхности $\mathbb{C}^*/G_{(1+2i)}$ и $\mathbb{C}^*/G_{(2-i)}$?

Задача 6. (18) Пусть P – точка на римановой поверхности X рода g и $d(n) = \dim \mathfrak{L}(nP)$. Назовем натуральное число n "застойным", если $d(n) = d(n-1)$. Сколько существует "застойных" чисел для данной точки $P \in X$?

Задача 7.

(a) (3) Найдите координаты точек второго порядка на эллиптической кривой $y^2 = x^3 + 1$.

(b) (8) Найдите координаты точек третьего порядка на этой кривой.

Задача 8. (16) Существует ли простая замкнутая геодезическая, которая делит замкнутую гиперболическую поверхность рода 3 на две части равной площади?