НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Задачи экзамена по курсу "Римановы поверхности" (лектор: О.В.Шварцман).

2 курс, 4-ый семестр. 10.09.1995.

Задача 1. (4) Пусть X – риманова поверхность рода g, P – фиксированная точка и

$$A : x \longmapsto \left(\int_P^x \omega_1, \dots, \int_P^x \omega_g \right)$$

– отображение Абеля поверхности X в ее якобиан $J(X)$. В момент времени t_0 точка P начинает двигаться со скоростью v. С какой скоростью начинает двигаться в момент времени t_0 образ $A(x)$ на $J(X)$?

Задача 2. (9) Пусть на римановой поверхности X рода $g > 1$ существует $g-1$ линейно-независимый голоморфный дифференциал, обращающийся в 0 в точках P_1 и P_2. Доказать, что риманова поверхность X – гиперэллиптическая?

Задача 3. Пусть X – риманова поверхность рода g.

(a) (6) Докажите, что если род $X \geq 2$, то на X не существует нетривиального голоморфного векторного поля.

(b) (2) Приведите пример нетривиального голоморфного векторного поля на поверхностях рода $g = 0, 1$.

Задача 4. Считая известными свойства σ-функции Вейерштрасса, а именно, что $\sigma(z) = z + o(z)($ при $z \to 0)$, $\sigma(z + 2\omega) = -\sigma(z) \exp\left(2\eta(z + \omega)\right)$, $\sigma(z + 2\omega') = -\sigma(z) \exp\left(2\eta'(z + \omega')\right)$, доказать, что

(a) (4) произведение $\prod_{r=1}^k \frac{\sigma(z-\alpha_r)}{\sigma(z-\beta_r)}$ задает эллиптическую функцию тогда, и только тогда, когда $\sum_{r=1}^k (\alpha_r - \beta_r) = 0$;

(b) (7) любая эллиптическая функция представима в виде $f(z) = const \prod_{r=1}^k \frac{\sigma(z-\alpha_r)}{\sigma(z-\beta_r)}$.

Задача 5. (4) Пусть g_1 и g_2 – два автоморфизма римановой поверхности X, удовлетворяющие в некоторой точке $x \in X$ условиям

$$g_1(x) = g_2(x), \ dg_1(x) = dg_2(x)$$

Верно ли, что $g_1 \equiv g_2$ на X?

Задача 6. (4) Пусть Γ – конечная группа автоморфизмов римановой поверхности X и род X/Γ равен 2. Чему равна размерность пространства Γ-инвариантных голоморфных дифференциалов на X?

Задача 7.

(a) (2) Вычислите род римановой поверхности X, заданной в $\mathbb{C}^2$ уравнением $y^3 = P_6(x)$, где $P_6(x)$ – многочлен шестой степени, не имеющий кратных корней.

(b) (4) При каких условиях на a и b дифференциал $\frac{x^a dx}{y^b}$ является голоморфным на X?

(c) (4) Рассмотрим автоморфизм

$$\tau : X \longrightarrow X, \ \tau : (x, y) \mapsto (x, \omega y), \ \omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

Вычислить след линейного преобразования τ_*, индуцированного преобразованием τ в пространстве $\Omega(X)$ голоморфных дифференциалов на X.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX