19.09.95.

Лекция 1

О первых задачах интегральной геометрии

Интегральная геометрия и томография исторически возникли из разных источников. Интегральная геометрия произошла из поздних работ Германа Минковского. Минковский родился в 1864 году в Алексоты (тогда это была Российская империя, теперь Литва). В двадцатилетнем возрасте он был награжден премией Парижской академии наук за работу на тему "Разложение целых чисел в сумму пяти квадратов". Его метод основан на изучении соответствующей квадратичной поверхности в $\mathbf{R}^5$. Позднее интересы Минковского стали все более смещаться к вещественной геометрии: выпуклые тела, пространство Минковского, теория относительности. В начале XX века он выступил с докладом в Московском Математическом обществе. Рассмотрим два класса выпуклых тел: тела постоянной ширины и тела постоянного охвата.

Шириной тела в направлении данного вектора называется расстояние между опорными плоскостями тела, ортогональными этому вектору, рис.1. Тело имеет постоянную ширину, если ширина не зависит от вектора.

Охватом тела в направлении данного вектора называется периметр проекции тела на опорную плоскость, ортогональную вектору, рис.2. Если охват не зависит от вектора, то это тело постоянного охвата.

Рис. 1 Рис. 2

В своем докладе Минковский доказал, что класс тел постоянной ширины совпадает с классом тел постоянного охвата. Пример: шар. Эту задачу можно свести к следующей. Пусть на сфере $S^2 \subset E^3$ задана непрерывная функция f. Будем рассматривать ее интегралы по большим окружностям C, то есть сечениям, проходящим через центр. Определяется ли функция f своими интегралами $\int\limits_C f ds$? Нет, если функция нечетная, то есть $f(-x) = -f(x)$, (мы считаем, что центр сферы в начале координат). Если же функция четная, то f однозначно восстанавливается, как доказал Минковский.

Это одна из первых теорем интегральной геометрии.

Замечание. Большие круги — геодезические на сфере.

Восстановление было не вполне эффективным: Минковский восстановил по $g(C)$ коэффициенты в разложении функции f в ряд по сферическим функциям. Статья была опубликована в Математическом Сборнике. Умер Минковский в 1909 г. (ему было 45 лет), после упомянутого доклада он уже не продолжал эту тематику. Гильберт, разобрав его бумаги, упомянул этот результат в речи на памятном заседании, которая была впоследствии напечатана. Им была поставлена задача: найти явную формулу для восстановления f по $g(C)$. Этим занимался его ученик Функ.

Пусть $g(C) = \frac{1}{2}\int\limits_C f ds$, то есть интеграл по полуокружности. Именно он существен в силу четности. Функ свел задачу к интегральному уравнению типа Абеля (работы 1913–1916 г.г.), но саму явную формулу не выписал. Тем не менее путь к этой формуле в его работах намечен. Завершив его рассуждение, можно прийти к формуле, которую мы приводим.

Пусть радиус сферы равен 1, p — точка сферы. Рассмотрим все большие круги на расстоянии q от этой точки, то есть те, которые касаются окружности радиуса q с центром p, рис. 3.

Рис. 3. Рис. 4.Вид "сбоку"

Пусть φ — угол между перпендикуляром к большому кругу, из точки p в точку касания, относительно некоторого фиксированного перпендикуляра. Положим $F(q) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(C_\varphi)d\varphi$, где C_φ — большая окружность, отвечающая углу φ, рис. 3. Тогда

$$f(p) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{F'(q)dq}{\sin q} + \frac{1}{\pi}F\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Последнее слагаемое в этой формуле является вкладом единственной окружности, отстоящей от точки p на расстояние $\pi/2$ (если p — "полюс", то эта окружность — "экватор", она же совпадает с C_φ для всех φ. $g(C_\varphi)$ постоянна по φ, и

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = g(C_\varphi)$$

.

При других значениях расстояния q $g(C_\varphi)$ не постоянно, и приходится реально выполнять интегрирование, см. вид “сбоку”на рис. 4. C — экватор на расстоянии $\frac{\pi}{2}$.

Для большей компактности H будем в дальнейшем писать: $F'(q)dq = dF$.

Интеграл в нашей формуле несобственный, ядро $\frac{dq}{\sin q}$ имеет особенность в нуле. Он сходится в силу достаточной гладкости F (для сходимости достаточно, чтобы функция F удовлетворяла условию Липшица).

Затем появился важный результат Радона (1917 г.). Вместо сферы он рассмотрел плоскость, вместо окружностей — прямые, то есть рассматривается пространство нулевой кривизны и в нем геодезические.

“Интегральная геометрия” — термин Бляшке, который предложил эту задачу Радону.

Итак, рассмотрим евклидову плоскость E^2, пусть f — непрерывная функция на E^2, L — прямая, $g(L) = \int\limits_L f ds$. Как восстановить f по g? Ответ Радона:

$$f(p) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{dF(q)}{q}, \quad F(q) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(L(\varphi, q))d\varphi, \text{ см. рис. 5.}$$

Рис. 5

В случае пространства постоянной отрицательной кривизны получается аналогичная формула, только в знаменателе $\mathrm{sh}q$. Работа Радона была долгое время забыта, формула переоткрывалась. Последние приблизительно 25 лет она стала очень популярна, нашла приложение в томографии, в частности, в медицинской томографии — новом средстве диагностики по сравнению с рентгеноскопией. Это интересная область контакта современной математики и техники. Мы обратимся к ней в следующей лекции.

26.09.95.

Лекция 2

Принцип рентгеновской томографии

В настоящее время в медицине используются стандартные томографы третьего поколения. На рис. 1 показана принципиальная схема такого томографа.

Источник рентгеновского излучения
Линейка детекторов (обычно 512 штук), преобразующих излучение в ток. Сигналы передаются в компьютер, обрабатываются и превращаются в томограмму.

Рис. 1

В отверстие помещается исследуемая часть тела пациента. Конструкция, состоящая из источника и линейки детекторов, может вращаться, как единое целое; очередной импульс излучения происходит после поворота на угол π/N, где N может достигать значения 1400.

Рис. 2. Принцип работы

На рис. 2 изображен рентгеновский луч, проходящий сквозь исследуемое тело и попадающий в детектор.

Здесь: a_0 — количество квантов, двигающихся по заданному направлению, a — количество квантов, попавших в начало малого отрезка, расположенного на рассматриваемом луче, a' — количество квантов, которое пришло в конец отрезка.

Детектор регистрирует γ-кванты, опадающие на него вдоль указанного луча. По пути происходит взаимодействие рентгеновского излучения с веществом. При взаимодействии фотон поглощается или рассеивается:

Рис. 3

Часть квантов продолжает двигаться в том же направлении.

Рис. 4. Детектор

Детектор (см. рис. 4) представляет собой колодец (коллиматор) с поглощающими стенками (например, свинцовыми). Он проводит регистрацию только квантов, летящих в данном направлении.

Применима простая физическая модель:

$$\ln \frac{a'}{a} \simeq -\triangle l f(p),$$

где p — точка, в которой все рассматривается, $\triangle l$ — длина отрезка, f имеет размерность l^{-1}.

f называется коэффициентом линейного поглощения. В простейшей модели будем считать, что f не зависит от направления в точке p и не зависит от положения данного элемента объема среды в пространстве, рис. 5. f имеет размерность обратной длины; если записать $f = h$ см$^{-1}$, то h называется числом Хаунсфилда. Оно зависит от энергии рентгеновского излучения. Этот коэффициент информативен, то есть различает разные ткани исследуемого тела.

f зависит только от p,
а не от направления.

Рис. 5

$$f = \begin{cases} -1000 & \text{для воздуха} \\ \sim 1 & \text{для кости} \\ 1000 \div 2000 & \text{для металла} \\ 0,1 \div 0,3 & \text{Для мягких тканей} \end{cases}$$

Более того, f различается для больных и здоровых тканей. Опухоль мозга: больная ткань на $3 \div 0,5\%$ отличается по плотности от здоровой. Современные томографы находят поражение на ранних стадиях, когда опухоль еще очень мала.

Перепишем соотношение: $-\ln \frac{a'}{a} = f(p)\triangle l$

$$\ln a - \ln a' = -\triangle \ln a$$

$$-\int d\ln a = \int f(p)dl$$

Интеграл накапливается в пределах объекта, так как по воздуху подинтегральная величина пренебрежительно мала.

$$\int d\ln a = \ln a|_{\text{детектор}} - \ln a|_{\text{трубка}} \,,$$

здесь в правой части — регистрируемые величины, хотя интенсивность излучения в трубке подвержена флуктуации. Для учета этого ставят калибровочный детектор (сбоку на рис. 5). Поэтому основную информацию несет a_D — интенсивность излучения на детекторе. В итоге

$$-\ln \frac{a_D}{a_T} = \int\limits_L f(p)dl.$$

В левой части — известная величина, значит, известна и вторая величина, интеграл по прямой. Объект можно считать неподвижным (фиксируется), кроме бьющегося сердца (это отдельная область томографии — мультфильмы сердца). Итак, интегралы известны, по ним требуется восстановить f. Насколько это удается, показывают реальные томограммы (демонстрируются). На самом деле можно получить много дополнительной информации, кроме изображения.

Первый практически применимый томограф построен инженером Хаунсфилдом в 1972 году. В 1979 г. Хаунсфилд и Кормиак были награждены Нобелевской премией по медицине. Алгоритмы восстановления в современной томографии основаны на формуле Радона. Формула, полученная Радоном в 1917 году, выглядит так:

$$f(p) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{F'(r)dr}{r}. \qquad (1)$$

Рис. 6

$F(r)$ — интегральное среднее по всем прямым на расстоянии r.

От этой формулы еще далеко до полного решения задачи томографии, так как на практике имеем лишь конечное число интегралов. Одна вспышка дает интегралы по 512 прямым. Большие дозы излучения вредны для пациента. Формула Радона требует большое число измерений для фиксированного r, затем изменения r для нахождения производной и последующего интегрирования. Параметризуем прямые λ на плоскости следующим образом:

Рис. 7

$$q = x\cos\varphi + y\sin\varphi$$

Можно допускать для q отрицательные значения:

$$\lambda = \lambda(q, \varphi) = \lambda(-q, \varphi + \pi).$$

тем самым имеем двулистную параметризацию множества Λ прямых на плоскости. Мы построили двулистное накрытие: $\mathbf{R}_q \times S_\varphi \to \Lambda$. $\mathbf{R}_q \times S_\varphi$ топологически — цилиндр. Λ получается из этого цилиндра склеиванием центрально-симметрических точек:

Рис. 8

Можно представить себе структуру Λ и по-другому:

Рис. 9

$0 \leq \varphi \leq \pi, \qquad q \in \mathbf{R}$. 0 и π соответствуют вертикальным прямым, то есть цилиндр склеивается по краям с поворотом. Так что топологически получается лист Мебиуса без края ($\mathbf{R}_q \sim (-a, a)$). Итак, преобразование Радона

$$g(q, \varphi) = \int\limits_{\lambda(q,\varphi)} f ds$$

определено на листе Мебиуса.

Формула Радона дает обращение этого преобразования. В координатах:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g'(q, \varphi) dq}{x \cos\varphi + y \sin\varphi - q},$$

$$g'(q . \varphi) = \frac{\partial g(q, \varphi)}{\partial q}.$$

Здесь в формулу (1) подставлена формула интегрального среднего для F, все дано в координатах.

Рис. 10

Проекция равна скалярному произведению $x \cos\varphi + y \sin\varphi$.

В знаменателе получается длина перпендикуляра от точки (x, y) до L. Знаменатель равен 0 на прямой, проходящей через точку (x, y).

Проинтегрируем по частям:

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g(q, \varphi) dq}{(x \cos\varphi + y \sin\varphi - q)^2}.$$

Второй интеграл расходится, поэтому запись не совсем корректна. Мы интерпретируем эту запись так: у g большой коэффициент, когда прямая проходит близко к точке (x, y). Формально в формуле обращения участвуют интегралы по всем прямым, а не только по близким.

Рассмотрим ядро: $K(q) = \frac{1}{(x\cos\varphi + y\sin\varphi - q)^2}$, при фиксированных x, y. Например, при $g = 1$ интеграл равен площади под графиком. Горизонтальные хвосты конечны, а вертикальный бесконечен.

Рис. 11

На самом деле интеграл понимается в смысле, который был до интегрирования по частям:

$\frac{-1}{x\cos\varphi + y\cos\varphi - q}$

Рис. 12

$f = 0$ вне некоторого круга, так что интеграл берется по конечному отрезку. В окрестности особенности интеграл существует в смысле **главного значения**

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{-R}^{c-\varepsilon} + \int\limits_{c+\varepsilon}^{R} \frac{g'\,dq}{c-q}, \qquad c = x\cos\varphi + y\sin\varphi.$$

По отдельности пределы не существуют! Таким образом, в формуле Радона имеется в виду интеграл в смысле главного значения.

Трудности для решения практических задач:

— посчитать производную по значениям в конечном числе точек,

— посчитать предел для интеграла в смысле главного значения.

Наши следующие шаги: доказать формулу Радона; получить практический алгоритм.