17.10.95

Лекция 5

Обращение преобразования Радона

Обращение преобразования Радона функции f осуществляется по плану:

$$g(\varphi, p) = \int\limits_{\lambda(\varphi,p)} f ds, \quad \lambda(\varphi, p) = \{x\cos\varphi + y\sin\varphi = p\}, \text{ рис.1.}$$

Рис.1

$$g \mapsto \tilde{g}, \quad \tilde{g}(\varphi, \sigma) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\sigma p} g(\varphi, p) dp$$

$$\tilde{g}(\varphi, \sigma) = \hat{f}(\sigma\cos\varphi, \sigma\sin\varphi).$$

Здесь волной обозначается одномерное, а крышкой — двумерное преобразование Фурье.

$$\hat{f}(\xi, \eta) = \int\int e^{-2\pi i(\xi x + \eta y)} f(x, y) dx dy$$

$$\hat{f} \mapsto f, f(x, y) = \int\int e^{2\pi i(x\xi + y\eta)} \hat{f}(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Нельзя ли упростить эту композицию за счет того, что в ней использованы “прямые” и “обратные” преобразования? Это действительно можно сделать.

$$f(x, y) = \int\int d\xi d\eta \int dp g(\varphi, p) e^{2\pi i(x\xi + y\eta - \sigma p)}, \quad \sigma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

$$\varphi = \arctan\frac{\eta}{\xi}, \quad \xi = \sigma\cos\varphi, \quad \eta = \sigma\sin\varphi, \text{ рис.2.}$$

Рис.2

Формально σ может быть и отрицательным, но в силу четности: $g(\varphi + \pi, -p) = g(\varphi, p)$ можно считать σ положительным. Без ограничения общности можно считать, что $x = y = 0$.

$$f(0,0) = \int\int\int d\xi d\eta g(\varphi, p) e^{-2\pi i \sigma p} dp.$$

Здесь g зависит только от полярного угла, а экспонента — только от радиуса на плоскости ξ, η, поэтому естественно во внутреннем интеграле перейти к полярным координатам:

$$\int\int h \cdot d\xi d\eta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} h \cdot \sigma d\sigma d\varphi,$$

то есть интегрирование происходит в плоскости σ, φ на полуполосе, рис. 3.

Рис.3

Обратно, можно считать, что полуполоса разворачивается на всю плоскость, как "веер" с бесконечным числом "лепестков".

Итак,

$$\begin{aligned} f(0,0) &= \int\int \sigma d\sigma d\varphi \int g(\varphi, p) e^{-2\pi i \sigma p} dp = \\ &= \int_0^{2\pi} g(\varphi, p) d\varphi \int \sigma d\sigma \int e^{2\pi i \sigma} p dp. \end{aligned}$$

Первый интеграл есть $2\pi F(p)$, где F — среднее интегральное по прямым, находящимся на расстоянии p от рассматриваемой точки, рис. 4, эта функция встречалась уже в первой лекции.

Рис.4

Теперь рассмотрим $\int\limits_0^\infty \sigma d\sigma \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi\sigma ip} dp$. Этот интеграл не существует с точки зрения классического анализа, но попробуем все же преобразовать его формально. Получим:

$$\int dp \int\limits_0^\infty \sigma e^{-2\pi i\sigma p} d\sigma.$$

Внутри стоит формально преобразование Фурье от функции σ_+, рис. 5.

Рис.5

Обозначим его $S(p)$. Окончательно получилось:

$$f(0,0) = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(p)S(p)dp.$$

Ввиду четности, его можно свести к $\int\limits_0^{+\infty}$. Какой может быть функция S? Попробуем “угадать”. Это можно сделать, применив свойства преобразования Фурье.

$$\frac{d}{d\sigma}\sigma_+ = \begin{cases} 0, & \sigma < 0 \\ 1, & \sigma > 0, \end{cases}$$

см. рис. 6. Это функция Хевисайда $\Theta(\sigma)$.

Рис.6

Хевисайд занимался проблемой передачи сигнала по проводам. Искажения сигнала возникают из-за различия скоростей распространения разных гармоник. Для этого надо и сложное колебание разложить на гармоники, то есть фактически совершить преобразование Фурье. Затем изучить распространение гармоник, с переданными гармониками выполнить обратное преобразование Фурье. Все это нашло обоснование в рамках теории обобщенных функций. Если функцию Хевисайда интерпретировать как ток, то ее производная вызывает циркуляцию магнитного поля. Она равна 0 всюду, кроме 0, но при интегрировании должна дать 1. Это δ-функция.

Таким образом, $\frac{d^2}{d\sigma^2}\sigma_+ = \frac{d\Theta}{d\sigma} = \delta$. Приближением δ-функции служит "столбик", рис .7.

Рис. 7

Попробуем вычислить ее преобразование Фурье.

Рис. 8. Изображение вещественной части экспоненты

$\int \delta(\sigma) e^{-2\pi i \sigma p} dp = 1$, так как при умножении, интегрировании и переходе к пределу $\varepsilon \to 1$ при получим просто значение экспоненты в 1. Итак, мы знаем преобразование Фурье от второй производной нужной нам функции.

По свойствам преобразования Фурье $S(p) = -\frac{1}{4\pi^2 p^2}$, так как преобразование Фурье от δ равно $-4\pi^2 p^2$, умноженное на преобразование Фурье от σ_+.

Итак,

$$f(0,0) = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(p) \frac{-dp}{4\pi^2 p^2} = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{F(p)dp}{p^2} = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dF}{p},$$

здесь первый переход сделан на основании четности, а второй — интегрированием по частям.

Мы получили формулу Радона в виде расходящегося (!) интеграла, классически неприемлемым способом. Все это можно обосновать в рамках теории обобщенных функций. Поскольку все операции не зависели от выбора начала координат, получаем:

$$f(x,y) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dF}{p},$$

где $F(p)$ — усреднение интегралов по прямым, находящимся на расстоянии p от точки (x,y).

В реальной ситуации детекторы учитывают конечное число не настоящих лучей, а полос, рис. 9.

Рис. 9

Следовательно, у нас имеется лишь конечный набор $g(\varphi_i, p_j)$, $i,j = 1,\dots,N$; $F(p_j)$ $j = 1,\dots,N$. В этом случае уже задача численного нахождения производной становится затруднительной. Не накопятся ли искажения так, что пропадет диагностическая ценность? Кроме того, для некоторых точек в области восстановления получится очень мало лучей, проходящих около точек на данном расстоянии.

Мы сталкиваемся с так называемой задачей об "отсчетах" — задачей восстановления функции по значениям в отдельных точках. Ею давно занимается теория сигналов. Ее задачи: запись, преобразование, восстановление сигналов. Например, по радио: есть модуляция по амплитуде, а есть по частоте. Восстановление: по значениям в точках восстановить исходный сигнал, рис. 10.

Рис. 10

В принципе, если о сигнале ничего неизвестно, то надо знать значения во всех точках. Но в реальной технической практике встречаются сигналы определенных классов. Например, у голоса спектр частот ограничен. Ухо воспринимает от 16 до 20 тысяч Гц, сам голос создает колебание в еще более узком спектре. Возникает сигнал, "ограниченный полосой", если буквально переводить английское выражение "band-limited". Это означает, что его преобразование Фурье является финитной функцией, рис. 11.

Рис. 11

Тем самым, значения в самом сигнале связаны.

$$f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{2\pi i x\xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Мы называем f сигналом с ограниченным спектром. Для таких сигналов развита теория восстановления.

24.10.95

Лекция 6

Функции с ограниченным спектром

Функции с ограниченным спектром f, такие что: $f \in L_2(\mathbf{R})$, $\tilde{f}(\xi) = 0$ $\xi \in \mathbf{R}\backslash[\alpha, \beta]$ ($\tilde{f}(\xi)$ — преобразование Фурье для функции f). Надо заметить, что f не обязана быть непрерывной, см., например, рис. 1.

Рис. 1

Такие функции f образуют линейное пространство, так как если f_1, f_2 — функции с ограниченным спектром, то и функция $(c_1 f_1 + c_2 f_2)$ — функция с ограниченным спектром в силу свойства преобразования Фурье: $\widetilde{(c_1 f_1 + c_2 f_2)} = (c_1 \tilde{f}_1 + c_2 \tilde{f}_2)$. Если имеются две функции f_1 и f_2, такие, что $\widetilde{f_1(\xi)} = 0$, где $\xi \in \mathbf{R}\backslash[\alpha_1, \beta_1]$, и $\tilde{f}_2(\xi) = 0$, где $\xi \in \mathbf{R}\backslash[\alpha_2, \beta_2]$, то заведомо $\widetilde{(c_1 f_1 + c_2 f_2)}(\xi) = 0$, где $\xi \in \mathbf{R}\backslash([\alpha_1, \beta_1] \cup [\alpha_2, \beta_2])$.

Теорема Пейли–Винера (Paley–Wiener). Пусть f — функция с ограниченным спектром: $f \in L_2(\mathbf{R}), \tilde{f}(\xi) = 0, \quad |\xi| > \alpha$. Тогда f имеет целое аналитическое продолжение $f(z)$ на плоскость $\mathbf{C}$ и $|f(z)| \le c e^{2\pi\alpha|y|}$, где $z = x + iy$.

Обратное утверждение. Если есть функция $g \in L_2(\mathbf{R})$, имеющая целое аналитическое продолжение на $\mathbf{C}$ с оценкой $|g(z)| \le c' e^{2\pi\alpha|y|}$, то g — функция с ограниченным спектром: $\tilde{g}(\xi) = 0$ почти всюду при $|\xi| > \alpha$.

Доказательство.

I. (Прямое утверждение) Сначала докажем, что функция f имеет целое аналитическое продолжение.

$$
\begin{aligned}
f(x) = \int e^{2\pi i x\xi} \tilde{f}(\xi) d\xi &= (\text{в силу того, что } \tilde{f}(\xi) = 0 \text{ при } |\xi| > \alpha) \\
&= \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} e^{2\pi i x\xi} \tilde{f}(\xi) d\xi
\end{aligned}
$$

— интеграл с конечным пределом. $\tilde{f} \in L_2(\mathbf{R})$ в силу теоремы Планшереля.

В силу неравенства Коши–Буняковского

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} |\tilde{f}| d\xi = \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} 1 \cdot |\tilde{f}| d\xi \le [\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} d\xi \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} |\tilde{f}|^2 d\xi]^{1/2} = \\
= (2\alpha)^{1/2} \left(\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} |\tilde{f}|^2 d\xi \right)^{1/2} < \infty.
\end{aligned}
$$

Следовательно, $\tilde{f} \in L_1(\mathbf{R})$.

Заметим, что

1) ядро интеграла $\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} e^{2\pi i z\xi}\tilde{f}(\xi)d\xi$ — это $e^{2\pi i z\xi}$ — голоморфная функция ($z \in \mathbf{C}$) ($e^{2\pi i z\xi}$ — разлагается в ряд);

2) интеграл $\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} e^{2\pi i z\xi}\tilde{f}(\xi)d\xi$ сходится для любого $z \in \mathbf{C}$ и

3) он сходится равномерно в круге $|z| \leq R$, где R — произвольно. Из утверждений 1), 2), 3) следует голоморфность интеграла в любом круге, то есть на всей плоскости.

Положим, пользуясь всем сказанным выше, $f(z) := \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} e^{2\pi i z\xi}\tilde{f}(\xi)d\xi$ — целое аналитическое продолжение f.

Оценим $|f(z)|$:

$$|f(z)| = |\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} e^{2\pi i z\xi}\tilde{f}(\xi)d\xi| \leq \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} |e^{2\pi i z\xi}||\tilde{f}(\xi)|d\xi.$$

Так как $|\xi| \leq \alpha$, то $-\xi y \leq \alpha|y|$. Имеем:

$$|e^{2\pi i z\xi}| = e^{2\pi(-y)\xi} \leq e^{2\pi i\alpha|y|} \text{ и } |f(z)| \leq e^{2\pi\alpha|y|}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} |\tilde{f}|d\xi.$$

Здесь $\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} |\tilde{f}|d\xi$ — конечная величина. Мы доказали первую часть теоремы.

II. (Обратное утверждение) У нас имеется целая аналитическая функция с оценкой $|g(z)| \leq ce^{2\pi\alpha|y|}$. Надо доказать, что $\tilde{g}(x)$ — функция с ограниченным спектром, то есть для $|\xi| > \alpha$: $\tilde{g}(\xi) = 0$. Предположим, что $|g(z)| \leq \frac{e^{2\pi\alpha|y|}}{|z|^2+1}$ и докажем утверждение нашей теоремы с более сильным условием. Благодаря этому на всякой прямой $y = \text{const}$ в $\mathbf{C}$ наша функция суммируема, то есть $|g| \leq \frac{c}{|x^2|+1}$. Поэтому функция $\tilde{g}$ непрерывна на всей оси и стремится к нулю на бесконечности (см. Лекция 4, Теорема 1).

Рис. 2

Будем считать преобразование Фурье.

$$\tilde{g}(\xi) = \int\limits_{\mathbf{R}} e^{2\pi i\xi x}g(x)dx = \int\limits_{y=\eta} e^{2\pi i\xi z}g(z)dz. \qquad (1)$$

Докажем обоснованность перехода (1). Рассмотрим полосу на плоскости переменной z, см. рис. 3.

Рис. 3

Посчитаем интеграл:

$$\int\limits_{\partial U} e^{-2\pi i\xi z} g(z)dz = \int\limits_{y=\eta>0} e^{-2\pi i\xi z} g(z)dz - \int\limits_{y=0} e^{-2\pi i\xi z} g(z)dz$$

Заметим, что интегралы вертикальным отрезкам a и b, равным по длине $|\eta|$ при стремлении $x \to \infty$ стремятся к нулю.

Рис. 4

Применим теорему Коши к голоморфной форме $e^{-2\pi i\xi z} g(z)dz$. Оценим ее:

$$|e^{-2\pi i\xi z} g(z)| \leq \frac{e^{2\pi\xi|y|}e^{2\pi\alpha|y|}\cdot c}{|z|^2+1}$$

, отсюда следует, что при любом ξ, $|\xi| \leq \alpha$ и $y=\eta$:

$$|e^{-2\pi i\xi z} g(z)| \leq \frac{ce^{4\pi\alpha|\eta|}}{|z|^2+1} \leq \frac{c'}{x^2+1}.$$

Это обеспечивает сходимость интеграла по любой горизонтальной прямой. Отсюда же следует, что интеграл по боковым сторонам стремится к нулю при "раздвигании" боковых сторон.

Согласно теореме Коши $\int\limits_{\partial U} e^{-2\pi i\xi z} g(z)dz = 0$ и, следовательно, переход (1) верен. Оценим $\tilde{g}(\xi)$:

$$\Big|\int\limits_{y=\eta} e^{-2\pi i\xi z} g(z)dz\Big| \leq ce^{2\pi(\xi\eta+\alpha|\eta|)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{|z|^2+1},$$

последний интеграл конечен, η — произвольно. Покажем, что $\tilde g(\xi)$ обращается в 0 при $|\xi|>\alpha$.

1) Пусть $\xi>\alpha$, тогда $(\xi\eta+\alpha|\eta|)\to-\infty$ при $\eta\to-\infty$ и $|\int\limits_{y=\eta} e^{-2\pi i\xi z}g(z)dz|$ при $\eta\to-\infty$. Но $\tilde g(\xi)$ от η не зависит, поэтому $\tilde g(\xi)=0$ при $\xi>\alpha$.

2) Пусть теперь $\xi<-\alpha$, тогда аналогично при $\eta\to+\infty$; отсюда следует, что $\tilde g(\xi)=0$ (ведь $\tilde g(\xi)$ от η не зависит).

Таким образом мы доказали более сильное утверждение, чем утверждение теоремы.

Общий случай.

1. Рассмотрим функцию $\chi(\xi)$, которая имеет вид, как на рис. 5 и рассмотрим обратное преобразование Фурье от функции $\chi_\varepsilon(\xi)=\frac{1}{\varepsilon}\chi(\frac{\xi}{\varepsilon}$.

Рис. 5

$h_\varepsilon(z)=\int e^{2\pi iz\xi}\chi_\varepsilon(\xi)d\xi$ — это целая аналитическая функция на $\mathbf{C}$ (согласно утверждению, доказанному в первой части) и $|h(z)|\leq\frac{ce^{2\pi\varepsilon|y|}}{|z|^2+1}$.

2. Вместо g рассмотрим $g_\varepsilon=h_\varepsilon g$, тогда оценка для g_ε будет следующая:

$$|g_\varepsilon(z)|\leq\frac{ce^{2\pi\alpha|y|}e^{2\pi\varepsilon|y|}}{|z|^2+1}\frac{e^{2\pi(\alpha+\varepsilon)|y|}}{|z|^2+1}.$$

Из предыдущих рассуждений следует: $\tilde g_\varepsilon(\xi)=0$ для любого ξ, $|\xi|>\alpha+\varepsilon$ и $\tilde g_\varepsilon=\tilde h_\varepsilon*\tilde g$ — свертка функций $\tilde h_\varepsilon$ и $\tilde g$ по $\tilde h_\varepsilon=\chi_\varepsilon$, следовательно, $\tilde h_\varepsilon*\tilde g\to\tilde g$ в $L_2(\mathbf{R})$, следовательно, $\tilde g=0$ почти всюду при $|\xi|>\alpha+\varepsilon$, но ε — любое, значит, $\tilde g=0$ почти всюду для $|\xi|>\alpha$. Теорема доказана.

Свойства функций с ограниченным спектром

1. Если f — функция с ограниченным спектром и имеется последовательность точек такая, что $f(x_k)=0$ и $x_k\to x_0\in\mathbf{R}$ $(x_k\neq x_j)$, то $f\equiv 0$.

2. Если f — функция с ограниченным спектром, то f' — также функция с ограниченным спектром и, следовательно, ограничена на $\mathbf{R}$. В самом деле $f'(x)=F^{-1}(2\pi i\xi\tilde f(\xi))=2\pi i\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\xi\tilde f(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi$ и

$$|f'| \leq 2\pi \int_{-\alpha}^{\alpha} |\xi \tilde{f}(\xi)| d\xi = 2\pi\alpha \int_{-\alpha}^{\alpha} |\tilde{f}(\xi)| d\xi \leq C_\alpha \|f\|_{L_2}$$

Поэтому функция f с ограниченным спектром не может вести себя произвольно на отрезке $[a, b]$, если значения $f(a)$ и $f(b)$ фиксированы.

31.10.95

Лекция 7

Теорема отсчетов

Рассмотрим вещественную функцию на оси t (время). Пусть в некоторые моменты ее значения известны (фиксируются прибором): $y = f(t),\ y_k = f(t_k),\ k \in \mathbf{Z}$ (отсчеты). Можно ли по этим данным восстановить функцию f? Произвольную - нет. Но оказывается, можно восстановить функцию с ограниченным спектром. Такие функции не могут вести себя хаотично, в частности, их корни не могут быть расположены слишком часто.

Примеры. 1. $y = \mathrm{sinc} t = \frac{\sin t}{t}$, рис. 1.

Рис. 1

Эта функция имеет нули в точках $t_k = k\pi,\ k \neq 0$, в 0 значение считается равным 1. В точках $k\pi$ ее функция отсчетов является базисной (одно значение 1, остальные — нули). sinc можно восстановить по отсчетам. Найдем ее спектр. В одной из предыдущих лекций он явно вычислялся, но можно его найти и по теореме Пейли–Винера, сделав оценку роста: $|\sin c| \leq \frac{e^{|z|}+1}{|z|}$. Имеем $\sin c = F^{-1}\left(\pi\chi_{\left[-\frac{1}{2\pi}\right]}\right)$, то есть sinc — функция с ограниченным спектром, см. рис. 2.

Рис. 2

2. $y(t) = \mathrm{sinc}(t - s)$. Это тоже функция с ограниченным спектром для любого $s \in \mathbf{R}$ (и даже для любого $s \in \mathbf{C}$). При $s = k\pi$ функция $y(t)$ тоже получится базисной.

3. $y(t) = \mathrm{sinc}(\lambda t)$.

Упражнение. Если $F : f(x) \mapsto \tilde{f}(\xi)$, то $F : f(\lambda x) \to \frac{1}{\lambda}\tilde{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$.

Для получения отрезка $\left[-\frac{\lambda}{2\pi}, \frac{\lambda}{2\pi}\right]$ (спектр функции $y(t)$), надо функцию, спектр которой — стандартный отрезок $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, подвергнуть растяжению с $\lambda = \pi$. Добавив еще сдвиги на πk, получим все базисные функции отсчетов: $g_0(t) = \mathrm{sinc}(\pi t)$,

$$g_k(t) = \mathrm{sinc}(\pi t - \pi k) = \mathrm{sinc}(\pi(t-k)), \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Тогда

$$g_k(l) = \delta_k^l = \begin{cases} 1, & l = k \\ 0, & l \neq k \end{cases}$$

Догадка: Пусть спектр лежит в отрезке $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Тогда должно быть $f(t) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} f(k) g_k(t)$.

Теорема (Уиттекер Э.Т.–Котельников–Шеннон). Пусть $f \in L^2$, $\mathrm{supp}\, \tilde{f} \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Тогда $f(t) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} f(k)\mathrm{sinc}(\pi(t-k))$ (имеется в виду сходимость ряда в L^2).

Доказательство. По теореме Планшереля $\tilde{f} \in L_2\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, вне этого отрезка она равна нулю. Разложим ее в ряд Фурье: $\tilde{f}(\xi) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i \xi}$, причем $\sum |c_k|^2 = \int |\tilde{f}|^2 d\xi = \int |f|^2 dx$ (равенство Парсеваля).

Тогда на всей оси $\tilde{f}(\xi) = \sum c_k \chi(\xi) e^{2\pi i k \xi}$, где χ — индикатор отрезка $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Возьмем обратное преобразование Фурье:

$$f(x) = \sum c_k F^{-1}\left(\chi(\xi) e^{2\pi i k \xi}\right) = \sum c_k \mathrm{sinc}(\pi(x-k))$$

, очевидно, $c_k = f(k)$.

Ряд сходится абсолютно для любого $x \in \mathbf{R}$. Действительно,

$$\left(\sum |c_k \mathrm{sinc}(\pi(x-k))|\right)^2 \leq \sum |c_k|^2 \sum |\mathrm{sinc}(\pi(x-k))|^2.$$

Поскольку $|\mathrm{sinc}\pi(x-k)| \leq \frac{1}{\pi|x-k|}$, то $\sum |\mathrm{sinc}(\pi(x-k))|^2 < \infty$. Теорема доказана.

Замечание 1. Сходимость ряда довольно медленная. При практическом численном восстановлении используется конечная сумма: $f(x) \approx \sum_{-N}^{N} f(k)\mathrm{sinc}(\pi(x-k))$. Отброшенный "хвост" имеет оценку $\left|\frac{2}{\pi^2(N-|x|)}\sum f^2(k)\right|^{1/2}$.

Медленность убывания происходит из-за разрыва характеристической функции. Поэтому можно ее сначала сгладить, рис. 3.

Рис. 3

Пусть $S(x) = F^{-1}(h)$. Эта функция быстро убывает, если h бесконечно гладкая. У функции S спектр шире, поэтому последовательность отсчетов должна быть более частой.

Задача 1 (Аналог теоремы Уиттекера–Котельникова–Шеннона). Покажите, что

$$f(x) = \sum_k f\left(\frac{k}{l}\right) S\left(x - \frac{k}{l}\right),$$

где S – преобразование Фурье функции h (рис. 3), которая равна 1 на $[-1/2, 1/2]$ и $supp\, h \subset [-l/2, l/2]$.

Указание. Разложите $\tilde{f}$ в ряд Фурье на $[-l/2, l/2]$.

Напишем ряд $\sum f(k)\mathrm{sinc}(\pi(x-k))$ для произвольной функции $f \in L^2(\mathbf{R})$ — не обязательно с ограниченным спектром. Предположим, что $\tilde{f} \in L_1(\mathbf{R})$ Как значение ряда связано с исходной функцией f? См. рис. 4.

окружность длины 1

Рис. 4

Задача 2. Рассмотрим $\{\lambda + k\}$ — последовательность прообразов λ при намотке оси ξ на окружность. Положим $g(\lambda) = \chi(\lambda) \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda + k)$. Докажите, что

$$\sum f(k)\mathrm{sinc}(\pi(x-k)) = F^{-1}g(x) \tag{2}$$

Указание. Сдвиг $T_k\varphi$ функции $\varphi(\xi)$ на целое число k не меняет значений $F^{-1}\varphi$ в целых точках $x = n$.

С точки зрения пространств:

$$PW\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset L^2(\mathbf{R}).$$

(Пространство функций со спектром в отрезке $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ является замкнутым подпространством в $L^2(\mathbf{R})$). Тогда проектор на $PW\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ является тождественным оператором на этом подпространстве. Формула (1) дает явный вид этого проектора: $Pf = \sum f(k)\mathrm{sinc}(\pi(x-k))$.

Задача 3 (формула Пуассона). Предположим дополнительно, что $\sum |f(k)| < \infty$. Докажите, что

$$\sum f(k) = \sum \tilde{f}(k).$$

Указание. Воспользуйтесь формулой (1).

Непрерывный процесс (одномерный) изображается функцией $f(x)$. Вообще говоря, спектр не ограничен. А численно восстановить можно только с ограниченным спектром. Отсюда происходит фильтрация:

$$f \xrightarrow{F} \tilde{f} \longrightarrow h\tilde{f} \xrightarrow{F^{-1}} fh,$$

где h — финитная функция.

Томография основана на двумерном аналоге теоремы отсчетов. очевидно, справедлив банальный декартов аналог — разложение по произведениям $\mathrm{sinc}(x)\mathrm{sinc}(y)$. На практике используются также и другие базисные функции.