14.11.95
Лекция 8

Свертка

Свертка на прямой R

$\mathbf{R}$ рассматривается как группа по сложению, dx — инвариантная мера.

Свертываются функции на $\mathbf{R}$.

$$f * g(x) \stackrel{def}{=} \int f(x-y)g(y)dy.$$

Достаточные условия существования: $\int |f|dx < \infty$ и $|g| \leq c$ или $\int |g|dx < \infty$.

Свойства свертки:

1) это билинейная операция по каждой свертываемой функции;

2) симметричность (коммутативность) $f * g(x) = \int f(z)g(x-z)dz = g * f$ (где $z = x - y$);

3) если f и g суммируемы, то свертка тоже суммируема и $\int |f*g|dx \leq \int |f|dx \int |g|dx$ или $||f*g||_1 \leq ||f||_1 \cdot ||g||_1$.

   Следствие. *Свертка превращает пространство $L_1(\mathbf{R})$ суммируемых функций в коммутативную нормированную алгебру с нормой: $||f||_1 := \int |f|dx$.*

4) ассоциативность: $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Предложение. Имеет место соотношение $F(f * g) = F(f)F(g)$ и инилогичное равенство для обратного преобразования Фурье.

Теорема. *Если $f, g \in L^1$, то $F(f * g) = F(f)F(g)$*

Доказательство.

$$\int e^{-2\pi i\xi x}dx \int f(x-y)g(y)dy =$$
$$\iint e^{-2\pi i\xi x} f(x-y)g(y)dxdy =$$
$$\iint e^{-2\pi i\xi(z+y)} f(z)g(y)dzdy =$$
$$\int e^{-2\pi i\xi z} f(z)dz \int e^{-2\pi i\xi y} g(y)dy = F(f)F(g),$$

здесь сделана замена $x - y = z$, $x = z + y$, ее матрица Якоби $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ имеет определитель 1. Кроме того, дважды применена теорема Фубини.

Следствие.

$$F^{-1}(\varphi\psi) = F^{-1}(\varphi) * F^{-1}(\psi).$$

Задача 1. Докажите тождество $F(f \cdot g) = F(f) * F(g)$ для функций f, g из пространства Шварца $S(\mathbf{R})$.

Свертка несуммируемых функций

Пусть функция f — локально суммируема, а g — финитная ограниченная функция.

Тогда свертка $f * g$ определена и локально суммируема.

Обобщенные функции

Пусть K — основное пространство состоит из финитных гладких плотностей $\equiv \rho = \varphi dx$, где φ — гладкая финитная функция.

Сходимость. Пусть имеется последовательность финитных гладких плотностей $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$. Мы пишем $\rho_k \to 0$ если:

1) имеется некоторый промежуток [-c,c], такой, что $\rho_k = 0$ вне этого промежутка.

2) $\frac{d^j\varphi_k}{dx^j} \to 0$ при $k \to 0$.

Такая последовательность называется сходящейся к нулю.

Более общо $\rho_k \to \rho \Leftrightarrow (\rho_k - \rho) \to 0$. Если $\rho_k \to \rho$, $\sigma_k \to \sigma$ *в* K, то $(\rho_k + \sigma_k) \to (\rho + \sigma)$.

Доказательство очевидно.

Определение. *Обобщенная функция на прямой есть непрерывный линейный функционал на* $K(\mathbf{R})$*:* $U: K(\mathbf{R}) \to \mathbb{C}$*, такой что*

$$u(a\rho + b\sigma) = au(\rho) + bu(\sigma) \text{ (линейность)},$$

$$u(\rho_k) \to u(\rho), \text{ если } \rho_k \to \rho \text{ (непрерывность)}.$$

Пространство обобщенных функций обозначается K'.

Слабая сходимость: $u_k \overset{слабо}{\Longrightarrow} u$ если $u_k(\rho) \to (\rho)\ \forall \rho \in K$ (слабая сходимость — поточечная сходимость).

Примеры:

I. Пусть f локально суммируемая функция на прямой (обычная функция). $[f]$ — обобщенная функция $[f](\rho) := \int f\varphi dx$; сходимость $\int f\varphi_k dx \to \int f\varphi dx$.

II. Дельта функция $\delta_a(\rho) = \varphi(a)$.

III. Интеграл Коши $\left[\frac{1}{x}\right](\rho) = \lim\limits_{\epsilon\to 0} \int\limits_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi}{x} dx$.

Операции над обобщенными функциями

1) Линейные операции.

2) Умножение на гладкие функции.

   Пусть $h \in C^\infty(\mathbf{R})$ и $u \in K'(\mathbf{R})$. По определению $hu(\rho) = u(h\rho)$.

   Замечание. Если мы возьмем обычную функцию f, то $[hf]\rho = \int hf\varphi dx = \int f(h\varphi)dx$, следовательно это определение согласовано с умножением обычных функций.

3) Дифференцирование

$$\frac{du}{dx}(\rho) = -u(\varphi' dx)$$

   Замечание. Для обычных функций

$$[f'](\rho) = \int f'\varphi dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{интегрирование} \\ \text{по частям}}}{=} -\int f\varphi' dx + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{т.к.}\varphi - \text{финитна}}}{0}$$

4) свертка обобщенной функции с элементом из K. σ — гладкая финитная плотность $\sigma = \psi(x)dx$).

$$[f * \sigma](\rho) =$$
$$= \int\int f(y)\psi(x-y)dy\varphi dx \overset{по\ теореме\ Фубини}{=} \int f(y)\left[\int \psi(x-y)\varphi(x)dx\right]dy =$$
$$(\text{полагаем } \check{\sigma} = \check{\psi}dx, \text{где } \check{\psi}(x) = \psi(-x))$$
$$= \int f(y)(\int \check{\psi}(y-x)\varphi(x)dx)dy = \int f(\check{\psi} * \rho)dy = [f](\check{\sigma} * \rho)$$

Поэтому мы определяем $(\sigma * u)(\rho) = u(\check{\sigma} * \rho)$.

Примеры.

IV. Производная δ функции

$$\delta' a = \frac{d\delta a}{dx} \quad \delta a'(\rho) = -\delta a(\rho') = -\varphi'(a).$$

Регуляризация обобщенных функций

Дельта-образная последовательность элементов из K, это последовательность $\rho_n = \varphi_n dx$, где φ_n слабо стремится к δ_0.

Выбираем произвольную функцию φ_1 такую, что $\int \varphi_1 dx = 1$ и строим последовательность плотностей

$$\varphi_n(x) = n\varphi_1(nx) \text{ и } \rho_n = \varphi_1(nx)d(nx).$$

Заметим, что $\int \rho_n = \int \varphi_1(nx)d(nx) = \int \varphi_1(y)dy = 1$ (подобно δ-функции).

Задача 2.

Если имеется δ-образная последовательность $\{\rho_n\}$, то для всякой $u \in K'$ $u * \rho_n \overset{слабо}{\Longrightarrow} u$.

Задача 3.

$$\forall u \in K', \ \forall \sigma \in K: \ u * \sigma \in C^\infty(\mathbf{R}).$$

Алгоритм томографического восстановления

Пусть $g(p, \alpha)$ — преобразования Радонна функции $f(x, y)$.

Запишем формулу обращения:

$$f(x,y) = -\frac{1}{2\pi^2}\int (g' * \frac{1}{p})(x\cos\alpha + y\sin\alpha, \alpha)d\alpha =$$
$$= -\frac{1}{2\pi^2}\int g * \left[\frac{1}{p}\right]'(x\cos\alpha + y\sin\alpha, \alpha)d\alpha$$

Таким образом восстановление f достигается сверткой и обратной проекцией.

Идея алгоритма заменить $\left[\frac{1}{p}\right]'$ на ее свертку с дельтаобразной функцией ψ: $\left[\frac{1}{p}\right]' * \psi$.