21.11.95

Лекция 9

Алгоритмы плоской томографии

Рис. 1

Стандартные алгоритмы "свертка" и "обратная проекция"

Установка медицинской томографии (см. рис. 1) получает около 20 тысяч интегралов по лучам, распределенным по параметрам α и p. Функция плотности теоретически может быть восстановлена по формуле

$$f(x.y) = -\frac{1}{2\pi^2}\int\int\frac{g'_p(p,\alpha)dp\,d\alpha}{x\cos\alpha + y\sin\alpha - p} =$$
$$= \text{Обратная проекция } \left(g * \left[-\frac{1}{2\pi^2 p^2}\right]\right)$$

Алгоритм свертки и обратной проекции основан на этой формуле, но оба интеграла заменяются дискретными интегральными суммами; производится выборка отсчетов по p и α. Поэтому важно провести ограничения спектра функции g. Вообще говоря g не обязана иметь ограниченный спектр. Исходная функция f имела компактный носитель (тело помещается внутри томографа). Значит и g имеет компактный носитель, ее спектр не может быть конечным (иначе она была бы целой аналитической). Так что условия компактности носителя и конечности спектра противоречивы.

1. Обрезка спектра функции $g:\ g \mapsto g_b$, $\operatorname{supp} F(g_b) \subset [-b,b]$. Самый простой способ: умножить $F(g)$ на финитную функцию Φ_b с носителем в $[-b,b]$. Функция Φ_b называется фильтром. Итак, $F(g_b) = F(g)\cdot\Phi_b$, отсюда находится g_b. Это можно делать непосредственно по указанным формулам при помощи алгоритма быстрого преобразования Фурье (число операций порядка $n\ln n$, где n — число точек, в которых задана g). Но можно воспользоваться свойствами свертки.

Пусть $w_b = F^{-1}(\Phi_b)$ (эта функция называется окном), мы имеем $g_b = g * w_b$. При такой фильтрации отбрасывается значительная часть шума (он имеет квантовый характер и является неустранимой погрешностью).

2. Дискретная свертка.

$$(g_b)_D * \left[-\frac{1}{2\pi^2 p^2}\right] = g_D * w_b * \left[-\frac{1}{2\pi^2 p^2}\right] = (g)_D * r_b$$

Функция $r_b = w_b * \left[-\frac{1}{2\pi^2 p^2}\right]$ называется регуляризацией сингулярной функции $-\frac{1}{2\pi^2 p^2}$, ее график показан на рис. 2.

Рис. 2

Приведем пример конкретного окна и конкретного фильтра (алгоритм Shepp-Logan).

$$w_b(\xi) = \begin{cases} sinc\,\frac{\xi\pi}{2b}, & |\xi| \le 1 \\ 0, & |\xi| > 1, \quad \text{рис. 3.} \end{cases}$$

Рис. 3

Рис. 4

$r_b(lh) = \frac{8b^2}{\pi^2}\frac{1}{1-4l^2}$, где $h = \frac{1}{2b}$ — шаг дискретизации (расстояния между точками отсчетов), l — номер точки отсчета. График см. на рис. 4. $w_b(0) = \frac{2}{\pi^2 h^2}$. В промежуточных точках функция r_b вычисляется при помощи линейной интерполящии.

Итак, окончательный результат в этом случае

$$\sum_l g(hl, \alpha)(x\cos\alpha + y\sin\alpha - hl) = G(x, y, \alpha).$$

3. Дискретная обратная проекция делается в предположении, что углы α распределены равномерно, рис. 1. Тогда $F(x, y) = \sum_k G(x, y, \alpha_k)\delta\alpha$, здесь $F(x, y)$ — восстановление по дискретным данным. Выбор шага по углу делается из условия $\alpha_k = k\delta\alpha$, $\delta\alpha r = h$. Неправильный выбор шага или алгоритма приводит к снижению качества и появлению артефактов.

Замечание. Мы занимались восстановлением, исходя из "параллельной геометрии": $\alpha_k = k\varphi$, $p_l = lh$. Сбор данных осуществляется по "веерной геометрии", рис. 5. Естественными координатами являются β и γ. Тогда решетка будет $\gamma = l\psi$, $\beta_k = k\chi$. Формулы перехода (элементарная геометрическая задача).

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta + \gamma - \tfrac{\pi}{2} \\ p &= R \sin\beta \end{aligned}$$

Рис. 5

Тогда необходим еще шаг интерполяции для перевода данных веерной геометрии в данные параллельной геометрии. Обычно применяется линейная интерполяция.

Точность восстановления.

$f \mapsto g \mapsto F_A$, A — алгоритм восстановления $g \mapsto g_b$, $b = \frac{1}{2h}$. Соотношение Найквиста $2bh \leq 1$. $\sin \frac{\pi}{h} p$ обращается в 0 в точках $p = lh$, т.е. не наблюдается в этих точках. Эта частота и более высокие отсекаются фильтром. На прикладном языке эта частота "изображает деталь размером h". В результате фильтрации отбрасываются "детали размера h и мельче". При восстановлении правильно изображаются "детали размера h".

Для проверки алгоритмов используются "фантомы" — явно заданные функции, для которых все интегралы считаются по аналитическим формулам. Восстанавливая такие функции, можно проверить точность восстановления.

Важный параметр — числа N квантов, по которым получаются данные вдоль одного луча. Чтобы измерить его, используется калибровочный детектор, находящийся вблизи источника. До него долетают почти все кванты N_0, двигающиеся в данном направлении. Можно считать, что в остальных направлениях летит примерно столько же квантов $N \approx N_0$. На самом деле имеет место квантовая флуктуация: $N \approx N_0 + O(\sqrt{N_0})$. Тогда $\frac{N}{N_0} = 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right)$. Пусть n — число дошедших до детектора квантов. $\frac{n}{N} \sim e^{-\int f\,ds}$. Следовательно относительная ошибка и у $\int f ds$ не меньше $O(\frac{1}{\sqrt{N_0}})$. А значит и f принципиально нельзя восстановить точнее. Например, для опухолей мозга разница в плотности $0,5 - 1\%$. Поэтому существенно, чтобы $O\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) \ll 0,01$, т.е. $N_0 \gg 10000$.

28.11.95

Лекция 10

Преобразование Радона в евклидовом пространстве $E = \mathbf{R}^n$

Пусть dV — n-мерная мера, dS — $n-1$-мерная мера. Для всякой функции $f \in C(E)$ с компактным носителем определено преобразование Радона

$$Rf(H) = g(H) = \int_H f dS$$

H — произвольная гиперплоскость.

Параметризуем гиперплоскость единичной нормалью $\omega \in S^{n-1}$ и расстоянием от гиперплоскости до начала координат в направлении нормали (со знаком). Таким образом получим двулистное накрытие $\mathbf{R} \times S^{n-1} \to \bigwedge^{n-1}(E)$ — пространство гиперплоскостей в $\mathbf{R}$. (p, ω) и $(-p, -\omega)$ задают одну и ту же плоскость. Полагаем $g(p, \omega) = g(H_{p,\omega})$.

Свойства преобразования Радона:

1. g непрерывна.
2. g имеет компактный носитель $\mathrm{supp} g = \overline{\{(p, \omega) | g(p, \omega) \neq 0\}}$. Это очевидно, т.к. на далеких от начала координат плоскостях g равно 0, поскольку там $f \equiv 0$.
3. $g(-p, -\omega) = g(p, \omega)$.

Обращение преобразования Радона

Схема: $Rf \mapsto Ff \overset{F^{-1}}{\mapsto} f$, где F — преобразование Фурье. $\hat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i\xi x} f(x)dx$, здесь ξx обозначает скалярное произведение.

При фиксированном ξ пространство E расслаивается на семейство гиперплоскостей, ортогональных $H(\xi, q) = \{x | x\xi = q\}$. Тогда

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i q} \left(\int_{H(\xi,q)} f(x) dS \right) dp$$

Внутренний интеграл почти совпадает с преобразованием Радона, единственное отличие: $|\xi|$ не обязательно равен 1. $\omega = \frac{\xi}{|\xi|}$, $p = \frac{q}{|\xi|}$, тогда $\hat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i p|\xi|} Rf(\omega, p)dp$.

Теперь можно применить обратное преобразование Фурье.

$$f(x) = \int e^{2\pi i x\xi} \hat{f}(\xi) d\xi = \int e^{2\pi i x\xi} \int e^{-2\pi i p|\xi|} g(p,\omega) dp d\xi =$$
$$= \int\int e^{-2\pi i(p|\xi| - x\xi)} g(p,\omega) dp d\xi.$$

Положим $x\xi = |x||\xi| \cos\alpha \quad \rho = |\xi|$, получим

$$\iiint e^{-2\pi i(p-|x|\cos\alpha)\rho} g(p,\omega) dp \rho d\rho^{n-1} d\omega =$$
$$\iint \left[\int_0^\infty e^{-2\pi i(p-|x|\cos\alpha)\rho} \rho^{n-1} d\rho \right] g(p,\omega) dp d\omega.$$

Положим $s = p - |x|\cos\alpha$.

Дальнейшие вычисления зависят от четности n. Пусть $n = 3$.

$$\int_0^\infty e^{-2\pi i s\rho} \rho^{n-1} d\rho \quad = \quad \int_0^\infty e^{-2\pi i s\rho} \rho^2 d\rho =$$

(в силу четности)

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-2\pi i s\rho} \rho^2 d\rho \quad = \quad \tfrac{1}{2} F_{\rho\to s}(\rho^2).$$

Это преобразование Фурье в смысле обобщенных функций. В смысле обычных интегралов все рассуждения будут верны, если домножить $\hat{f}(\xi)$ на регуляризующую функцию $e^{-\epsilon\rho^2}$. Она стремится к 1 при $\epsilon \to 0$, значит после преобразования Фурье получим свертку с функцией, стремящейся к δ-функции, а окончательный результат будет стремиться к $F_{\rho\to s}(\rho^2)$.

Это преобразование Фурье легко считается: $F(1) = \delta_0 \Rightarrow F(\rho^2) = \frac{\delta_o''(s)}{-4\pi^2}$.

Итак,

$$f(x) = -\tfrac{1}{8\pi^2} \int \left[\int \delta_0''(p - |x|\cos\alpha) g(p,\omega) dp \right] d\omega =$$

$$-\tfrac{1}{8\pi^2} \int_S g_{pp}''(|x|\cos\alpha, \omega) d\omega.$$

В случае регуляризации во внутреннем интеграле на самом деле стоит “δ''-образная последовательность”, рис. 1.

δ-образная функция $\quad$ δ'-образная функция $\quad$ δ''-образная функция

Рис. 1

Рассмотрим $H_{p,\omega}$, где $p = |x|\cos\alpha$, α — угол между x и ξ, или между x и ω, рис. 2.

Рис. 2

Видим, что x просто лежит в плоскости $H_{p,\omega}$. Так что при изменении ω получим пучок плоскостей, проходящих через x.

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{H_{p,\omega}\ni x} g''_{pp}(H_{p,\omega})d\omega.$$

Имеем две операции: двукратное дифференцирование и обратную проекцию. Напомним, что в двумерном случае была свертка и обратная проекция.

В трехмерном случае имеется локальность формулы восстановления. Для восстановления функции в точке x достаточно знать g только на плоскостях, сколь угодно близких к x. В случае $n = 2$ это не так.

При всех нечетных n рассуждения такие же и получим более высокие производные в формуле восстановления, она будет локальной.

При четном n придем к $F(|\rho|^{n-1})$.

$$|\rho|^{n-1} = \rho^{n-1}\text{sign } \rho.$$

Значит, надо вычислить

$$F(\text{sign } \rho) = \int_0^\infty - \int_{-\infty}^0 e^{-2\pi i s\rho}d\rho = -\frac{e^{-2\pi i s\rho}}{2\pi i s}\Big|_{0,0}^{\infty,-\infty} = \left[\frac{1}{\pi i s}\right].$$

(Обобщенная функция в смысле главного значения.)

Тогда $\operatorname{sign}\rho\cdot\varphi(\rho)\overset{F}{\mapsto}\left[\frac{1}{\pi is}\right]*\hat{\varphi}(s)$. Последняя свертка называется оператором Гильберта.

$H\psi(s)=\frac{1}{\pi i}\int\frac{\psi(s-p)}{p}dp=\frac{1}{\pi i}\int\frac{\psi(p)dp}{s-p}$, это не локальный оператор.

Свойства:

1. H — унитарный самосопряженный оператор в L^2,
2. $H^2=id$.

В трехмерном случае формула работает в ЯМР-томографии, основанной на другом физическом принципе — ядерно-магнитном резонансе.

Есть и другие формулы восстановления, но различие в локальности остается.

$$\left.\begin{array}{l} n=3 \\ f(x)=-\frac{1}{8\pi^2}\cdot\Delta_x\cdot\int g(p,\omega)d\omega \\ n=2 \\ f(x)=-\frac{1}{2\pi^2}\sqrt{-\Delta}\int g(p,\omega)d\omega. \end{array}\right\} p=|x|\cos\alpha.$$

5.12.95

Лекция 11

Обращения преобразования Радона в E^n

Пусть f — ограниченная функция на E^n с компактным носителем,

$$g(p,\omega)=\int\limits_{H_{p,\omega}} f\,ds$$

— ее преобразования Радона. Тогда

$$f(x)=\frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}\begin{cases}(-1)^{\frac{n-2}{2}}\int\left[i\mathcal{H}\frac{\partial^{n-1}}{\partial p^{n-1}}g(p,\omega)\right]_{p=\omega x}d\omega, & n-\text{четно}\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\int\left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial p^{n-1}}g(p,\omega)\right]_{p=\omega x}d\omega, & n-\text{нечетно}\end{cases}$$

где $\mathcal{H}a(p)=\frac{1}{\pi i}\int\frac{a(q)}{q-p}dq$ — оператор Гильберта.

Эта формула следует из полученной в предыдущей лекции формулы $f(x)=\frac{1}{2}\int\left(-\frac{H}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial p}\right)^{n-1}g\,d\omega=\frac{1}{2}\int\left(-\frac{\mathcal{H}}{2\pi i}\right)^{n-1}\frac{\partial^{n-1}}{\partial p^{n-1}}g\,d\omega$, учитывая четность n и свойство $\mathcal{H}^2=id$.

Образ преобразования Радона

Рассмотрим оператор Радона $R: \quad C_0(E) \to C_0(\mathbf{R} \times S^{n-1})$

$$R^{-1}: \quad C_0^{n-1}(\mathbf{R} \times S^{n-1}) \to C(E),$$
$$R^{-1}g(x) = \frac{1}{2} \int \left(-\frac{\mathcal{H}}{\in \pi \rangle} \frac{\partial}{\partial p}^{n-1} \right) g d\omega$$

Очевидно, $R^{-1}R = \mathrm{id}: \quad C_0^{(n-1)}(E) \to C(E)$.
На образе R выполняются так называемые "условия Кавальери".
Пример. Рассмотрим индикатор области Ω на плоскости, рис. 1.

Рис. 1

$g(p, \varphi) = \int\limits_{H_{p,\omega}} \chi_\Omega ds$. Тогда площадь $\Omega = \int g(p, \varphi) dp$, (это теорема Фубини). $\int f dx dy = \int g(p, \varphi) dp \quad \forall \varphi$. Т.е. интеграл преобразования Радона по p не зависит от φ. (Для этого достаточно, чтобы $f \in L^1$.)

Итак, условия Кавальери (для простоты пока $n = 2$).

$$0) \quad \int g(p, \varphi) dp \quad \text{не зависит от} \, \varphi$$
$$\dots$$
$$\begin{gathered} k) \quad \int p^k g(p, \varphi) dp = \int p^k \left(\int f ds \right) dp = \\ = \int \left(\int (x \cos\varphi + y \sin\varphi)^k f(x, y) ds \right) dp = \\ = \iint (x \cos\varphi + y \sin\varphi)^k f(x, y) dx dy = \\ = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cos^j \varphi \sin^{k-j} \varphi \iint x^j y^{k-j} f dx dy = \\ = \sum_{j=0}^{k} C_j \cos^j \varphi \sin^{k-j} \varphi \end{gathered}$$

Вывод $\int p^k g(p, \varphi) dp$ — тригонометрический полином степени k. В частности, тригонометрический полном степени 0 — константа.

В случае произвольной размерности $\int p^k g(p, \omega) dp$ есть однородный полином степени k от $\omega_1, \dots, \omega_n$. Этот полином определен однозначно именно как однородный (просто полином на сфере определен с точностью до $g(\omega)(\omega^2 - 1)$). Рассуждение справедливо для любой быстро убывающей функции f, т.е. $f = O(r^{-N}) \, \forall N$. Преобразование Радона будет функцией того же класса.

Условия Кавальери представляют собой счетный набор функциональных условий. Они выделяют в некотором смысле "малое" подпространство Кавальери $\mathcal{K} \subset C_0(\mathbf{R} \times S^{n-1})$.

Итак, $R: \quad C_0(E) \to \mathcal{K} \subset C_0(\mathbf{R} \times S^{n-1})$.

Являются ли условия Кавальери достаточными, чтобы функция была из образа R? Ответ положительный.

Теорема. (Helgason) $R: \quad S(E) \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_S \subset S(\mathbf{R} \times S^{n-1})$.

В одну сторону мы фактически ее доказали, а в другую доказательство более сложное, см. книгу Хелгасон “Преобразования Радона”, 1983.

Выводы:

1. Формула обращения не единственна. К нашему R^{-1} можно добавить любой оператор K, равный 0 на подпространстве Кавальери.

   Например, $K(g) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \int g(p, \varphi) dp$. $K|\mathcal{K} = 0$.

   $R^{-1} + K$ — тоже оператор обращения.

2. Задача с неполным угловым диапазоном.

   Пусть $g(p, \varphi)$ известна лишь для $-\alpha \le \varphi \le \alpha < \frac{\pi}{2}$, рис. 2.

Рис. 2

Пучок прямых, по которым доступны интегральные данные.

Такая ситуация часто встречается в прикладной томографии (просвечивание тонкой стенки, контроль движущихся по конвейеру изделий, отыскание полости в зубе при помощи ультразвука).

Это пример некорректной задачи. Мы не можем произвольно дополнить данные. Дело в том, что полином Кавальери восстанавливается по локальным данным. Поэтому g надо продолжать так, чтобы интегралы Кавальери дали тот же полином. С вычислительной точки зрения это значит счет производных большого порядка. Задача вычисления производной по произвольным данным некорректна. Если же продолжим g произвольно, то восстановление даст нефинитную функцию f (практически получим размытое изображение). В разных прикладных науках применяют разные способы. Например, в геофизике обычно продолжают g нулем.

Теорема отсчетов с пропущенными интервалами

Напомним, что для функции с ограниченным спектром, $\varphi(x) = \sum \varphi(k)\operatorname{sinc}(\pi(x-k))$, $\operatorname{sinc} z = \frac{\sin z}{z}$. *sinc* - целая аналитическая функция, а значит можно продолжить и φ.

Как восстановить функцию по отсчетам с пропущенным интервалом, т.е. когда отсчеты известны при $x \notin [-a, a]$? Оказывается, можно построить последовательность отсчетов, по которым функция восстанавливается.

Есть только одна функция экспоненциального типа, которая обращается в 0 в целых точках. Это функция $|\sin \pi z|$, имеющая оценку $O(e^{\pi|y|})$. Идея — построить функцию того же типа, обращающегося в 0 в некоторых точках на этих лучах. Рассмотрим функцию $\cos\sqrt{z^2 - a^2}$. Это целая функция; двузначность корня ликвидируется четностью косинуса. Экспоненциальная оценка выполняется. найдем корни: $w = \sqrt{z^2 - a^2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Тогда $z^2 = a^2 + \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2 \geq a^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$

$$z = \pm\sqrt{a^2 + (\pi/2 + k\pi)^2}.$$

Функцию класса Пэли-Винера можно восстановить по значению в этих точках. Восстановление можно получить с помощью формулы Коши.

$$\frac{\varphi(z)}{\cos\sqrt{z^2 - a^2}} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\xi)d\xi}{(\xi - z)\cos\sqrt{\xi^2 - a^2}},$$

где Γ — контур, рис. 3.

Рис. 3

$$-\sum_{\pm\xi_k} \operatorname{res}\frac{\varphi d\xi}{(\xi - z)\cos\sqrt{\xi^2 - a^2}}|_{\xi=\xi_k}.$$

$\xi_k = \sqrt{a^2 + (\pi/2 + k\pi)^2}$, имеются в виду лишь те корни, которые охвачены контуром.

Дальнейшая идея — раздувать контур так, чтобы интеграл стремился к 0. В итоге интеграл исчезает, получаем бесконечную сумму, где используются лишь значения φ в точках ξ_k.

12.12.95

Лекция 12

Теорема. Пусть $a > 0$, $b > 0$, $\varphi \in L_2(R)$, причем $\operatorname{supp} \tilde{\varphi} \subset \left[-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}\right]$. Тогда

$$\varphi(z) = \frac{a}{\pi} \mathrm{ch} \left(\frac{\pi}{a} \sqrt{b^2 - z^2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cos \alpha_k \left(\frac{\varphi(a_k)}{-z + z_k} + \frac{\varphi(-a_k)}{z + a_k} \right),$$

где $a_k = \left| a\left(k + \frac{1}{2}\right) + ib \right|$, $\quad \alpha_k = \arg\left(a\left(k + \frac{1}{2}\right) + ib\right)$, рис. 1.

Рис. 1.

Таким образом, функция φ, принадлежащая классу Пэли-Винера, восстанавливается по своим значениям в неравномерной последовательности узлов $\pm a_0, \pm a_1, \ldots$. Интервал $(-a_0, a_0)$ не содержит узлов и может быть произвольно большим. Расстояние между соседними узлами стремится снизу к величине a равной интервалу Найквиста, однако на любом отрезке вида $[-c, c]$, $c > a$ количество этих узлов меньше числа точек вида $a\left(k + \frac{1}{2}\right)$, т.е. узлов в формуле Уитекера-Котельникова. При $b = 0$ теорема превращается в эту формулу с узлами сдвинутыми на половину интервала Найквиста.

Лемма. Имеется функция $\epsilon(r) > 0$ положительного аргумента такая, что $\epsilon(0) = 1$; $\epsilon(r) \searrow 0$, $r \to \infty$ и

$$|\varphi(z)| \leq \sqrt{\frac{\pi}{a}} \epsilon(|x|) \exp\left(\frac{\pi}{a}|y|\right). \tag{1}$$

Доказательство.

Имеем по теореме Пэли-Винера

$$|\varphi(z)| \leq ||\tilde{\varphi}||_{L_1} \exp\left(\frac{\pi}{a}|y|\right) \leq \sqrt{\frac{\pi}{a}} ||\tilde{\varphi}||_{L_2} \cdot \exp\left(\frac{\pi}{a}|y|\right). \tag{2}$$

Согласно теореме отсчетов

$$\varphi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi(ka) \mathrm{sinc}((z/a - k)\pi),$$

откуда $\varphi = \varphi_N + \psi_N$, где φ_N — частичная сумма в этом ряде для $|k| \leq N$, а ψ_N — остаток. Мы снова имеем $\psi_N \in L_2$ и $\operatorname{supp} \tilde{\psi}_N \subset \left[-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}\right]$, причем $||\psi_N|| \to 0$ при $N \to \infty$. Зададим число ϵ, $0 < \epsilon < 1$ и выберем N так, чтобы $||\psi_N|| \leq \frac{\epsilon}{2}\sqrt{\frac{a}{\pi}}$. Применив (2) к ψ_N, мы оценим эту функцию величиной $\epsilon/2\exp(\pi/a|y|)$. Функция φ_N, очевидно, удовлетворяет (1), следовательно существует число c такое, что при $|x| \geq c$ мы также имеем $|\varphi_N| \leq \epsilon/2\exp(\pi/a|y|)$. В итоге получаем (1) с $\epsilon(c) = \epsilon$.

Докажем теперь теорему. Рассмотрим мероморфную дифференциальную форму

$$\Theta_z = \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{ch(\pi/a\sqrt{b^2-\zeta^2})(\zeta - z)}$$

с полюсами первого порядка в точках $z, \pm a_0, \pm a_1, \ldots$ и проинтегрируем ее по границе прямоугольника $\Pi_{A,B}$, образованного прямыми $\mathrm{Re}\zeta = \pm A$ и $\mathrm{Im}\zeta = \pm B$, где $A = k\pi$, $B < |\mathrm{Im}\, z|$. Как мы увидим ниже, этот интеграл стремится к нулю при $A \to \infty$. Поэтому сумма всех вычетов формы Θ_z, равна нулю. Выделяя вычет в точке z, мы получим утверждение теоремы.

При больших A и B на границе $\Pi_{A,B}$ справедливы неравенства

$$\mathrm{ch}(\pi/a\sqrt{b^2-\xi^2}) \geq \tfrac{1}{3}\exp(\pi b/a), \quad |\zeta - z| \geq 3/4|\zeta|.$$

Используя также (1), мы оценим интегралы по основаниям Π_B и боковым сторонам Π_A:

$$\left|\int\limits_{\Pi_B} \Theta_z\right| \leq 16\sqrt{\pi/a}AB,$$

$$\left|\int\limits_{\Pi_A} \Theta_z\right| \leq 16\sqrt{\pi/a}\cdot\epsilon(A)B/A,$$

откуда

$$\left|\int\limits_{\partial\Pi_{A,B}} \Theta_z\right| \leq C(A/B + \epsilon(A)\cdot B/A).$$

Полагая $B = A/\sqrt{\epsilon(A)}$, находим, что правая часть стремится к нулю при $A \to \infty$, ч. и т.д.

Как влияет пропуск такого большого интервала? Положим $a = 1$. Внесем ошибку:

$$\delta\varphi(z) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{ch}(\pi\sqrt{b^2-z^2}\sum\left(\frac{\delta\varphi_{a_k}}{a_k - z} + \frac{\delta\varphi_{-a_k}}{a_k + z}\right)\cos\alpha_k$$

$\mathrm{ch}(\pi b) = \frac{e^{\pi b}+e^{-\pi b}}{z}$, поэтому $\delta\varphi(0) = \frac{1}{\pi}e^{\pi b}\left(\sum\frac{\delta\varphi_k}{a_k}\right)$ (и это наилучшая из формул для всего класса PW).

Обобщение. Из какой-то последовательности $\{b_k\} \subset \mathbf{R}$ надо построить аналитическую функцию с корнями $\{b_k\}$. Ее можно построить $\varphi(z) = \pi(z - b_k)e^{g(z)}$. Если $b_k = ka$, то $e(z) = \sin\frac{\pi z}{a}$.

Восстановление по неполным данным

Пусть f суммируемая функция, заданная в евклидовом пространстве R^n, g ее преобразование Радона, определенное как четная функция на $S^{n-1} \times R$. Задача обращения преобразования Радона по данным в неполном угловом диапазоне состоит в том, чтобы восстановить функцию f, зная $g = g(\omega, p)$ лишь в области $\Omega \times R$, где Ω непустое открытое подмножество в S^{n-1} (его всегда можно считать центрально симметричным). По теореме о проекциях мы имеем $\tilde{f} = F_{p \to t} g$, где $\tilde{f}$-мерное преобразование Фурье оригинала. Таким образом, функция $\tilde{f}$ нам известна на пучке прямых $\xi = t\omega$, $t \in R$, $\omega \in \Omega$, порожденном диапазоном Ω. Этот пучок открыт и следовательно в подходящей системе координат он содержит конус вида

$$K_\kappa = \{\xi \in R^n, \quad |\xi_1| \geq \kappa |\xi'|\}, \quad \kappa = \mathrm{ctg}\alpha,$$

где α половина угла этого конуса при вершине, а $\xi' = (\xi_2, \ldots, \xi_n)$. Рассмотрим любую прямую вида $\xi' = \xi'_0$ и положим $\varphi(\xi_1) = f(\xi_1, \xi'_0)$. На оригинал f наложим условие

$$\mathrm{supp} f \subset \{x \in R^n, \quad |x_1| \leq r\}. \tag{3}$$

При этом условии функция φ удовлетворяет предположениям теоремы с $a = \frac{1}{2r}$ и поэтому ее можно интерполировать на интервал $(-\rho, \rho)$, $\rho = \kappa |\xi'_0|$, если в этой теореме положить $b^2 = \rho^2 - (1/4r)^2$.

Следствие

Функция f, удовлетворяющая (3), восстанавливается в $R^n \backslash K_\kappa$ по формуле

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\xi_1, \xi') = 1/r\mathrm{ch}(r\sqrt{b^2 - \xi_1^2}) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cos \alpha_k \times \\ \times \left(\frac{\tilde{f}(\rho_k, \xi')}{\xi_1 - \rho_k} + \frac{\tilde{f}(-\rho_k, \xi')}{\xi_1 + \rho_k} \right), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\rho_k = \sqrt{\rho^2 + \frac{k(k+1)}{4r^2}}$.

При каждом k гиперповерхность $\xi_1 = \pm \rho_k$ является двуполостным гиперболоидом вращения, содержащимся внутри K_κ для которого граница K_κ есть асимптотический конус. Применяя обратное преобразование Фурье к $\tilde{f}$, получаем решение задачи обращения преобразования Радона по неполным данным.

19.12.95

Лекция 13

Теорема отсчетов с недоступным интервалом

$$\varphi(x) \in PW[-1,1] \Longleftrightarrow \mathrm{supp}\, \tilde{\varphi} \subset [-1,1] \quad |\varphi(z)| \leq c e^{2\pi |yy|}$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{ch}(2\pi\sqrt{a^2-z^2}) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cos\alpha_k k \left(\frac{\varphi(a_k)}{a_k - z} + \frac{\varphi(-a_k)}{a_k + z}\right),$$

где $a_k = |\frac{k}{2} + \frac{1}{4}) + ia|$.

$$\begin{gathered}
\mathrm{ch}(2\pi\sqrt{a^2-z^2}) = 0\\
2\pi\sqrt{a^2-z^2} = \pm i(\tfrac{\pi}{2} + k\pi) \quad k = 0, 1, \ldots\\
\sqrt{a^2-z^2} \pm i(\tfrac{1}{4} + \tfrac{k}{2})\\
z^2 = a^2 + (\tfrac{1}{4} + \tfrac{k}{2})^2\\
z_k = \sqrt{a^2 + (\tfrac{1}{4} + \tfrac{k}{2})^2}
\end{gathered}$$

α_k — аргумент числа $((\frac{k}{2} + \frac{1}{4}) + ia)$.

d_k при возрастании k стремится к $\frac{1}{2}$. Когда $z = 0$ величина $\mathrm{ch}(2\pi a)$ велика, а когда $z > a$, то мы получаем обычный косинус.

Это пример, когда функция в недоступном интервале может быть очень большой не смотря на то, что в известных интервалах она ограничена. Наша функция $\varphi(z)$ не принадлежит α_2, но например $\psi(z) = \frac{\mathrm{ch}(2\pi\sqrt{a^2-z^2})}{z \pm a_k}$ принадлежит α_2.

Идея доказательства. Используем теорему Коши. Рассмотрим дифференциальную форму $\Theta_z = \frac{\varphi(\xi)d\xi}{\mathrm{ch}(2\pi\sqrt{a^2-\xi^2})(\xi - z)}$. Это мероморфная дифференциальная форма с полюсами $\xi = \pm a_k$, $\xi = z$.

Рассматриваем интеграл $\int\limits_{\Pi_{A,B}} \Theta_r$

и покажем, что $\int\limits_{\Pi_{A,B}} \Theta_r \to 0$, когда $A, B \to \infty$ некоторым образом. Представим, что мы доказали это, тогда воспользуемся теоремой о вычетах $\int\limits_{\Pi_{A,B}} \Theta_z = 2\pi i \left[\sum\limits_0^{a_k<A} \operatorname{res}_{-a_k} \Theta_z + \operatorname{res}_{-a_k} \Theta_z + \operatorname{res}_z \Theta_z\right]$, тогда переходя к пределу получаем, что

$$\sum_0^\infty (\operatorname{res} a_k \Theta_z + \operatorname{res}_- a_k \Theta_z) = -\operatorname{res} z\Theta = \frac{-\varphi(z)}{\operatorname{ch}(2\pi\sqrt{a^2 - z^2})}$$

отсюда $\varphi(z) = -\operatorname{ch}(2\pi\sqrt{a^2-z^2})(-\sum_0^\infty(\operatorname{res} a_k\Theta_z + \operatorname{res}_- a_k\Theta_z))$. Вычет $\eta = f(z)dz$ — мероморфная форма $\operatorname{res}_a \eta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \eta$ (не зависит от выбора вспомогательного контура). $d\eta$ — голоморфная форма. Поэтому

$$\operatorname{res}_a \frac{dz}{z-a} = 1 \quad \text{(посчитать!)}$$

Вычисление вычетов от дифференциальной формы

1. $\eta = \frac{f(z)dz}{z-a} = f(a)\frac{dz}{z-a} + f'(a)dz + \ldots \quad \operatorname{res}_a \eta = f(a)$.
2. $\eta = \frac{f(z)}{g(z)}dz$ причем $g(a) = 0$. Предположим, что $g'(a) \neq 0$. Тогда $\operatorname{res}_a \eta = \frac{f(a)}{g'(a)}$. По теореме Безу $g(z) = h(z)(z-a)$ и $h(a) = g'(a) \neq 0$, $\eta = \frac{f(z)}{h(z)}\frac{dz}{(z-a)}$.

3. $g(a)=g'(a)=0$, $g^{(x)}(a)\neq 0$. Тогда $\operatorname{res}_a \eta = \frac{f(a)}{g^k(a)}$.

Обращение преобразования Радона по неполным угловым данным.
$g(p,\varphi)$ известно для $|\varphi|\leq\alpha<\frac{\pi}{2}$ при $\forall p$.

$$\tilde{g}(\rho,\varphi)=\int e^{-2\pi i\rho p}g(p,\varphi)dp=F_{(x,y)\to(\xi,\eta)}f$$

$$\left.\begin{array}{r}\xi=\rho\cos\varphi\\ \eta=\rho\sin\varphi\end{array}\right\}\text{двойственная плоскость}$$

(На рисунке проводим прямую $\eta=c$.)

$g(p,\varphi)=\int\limits_{x\cos\varphi+y\sin\varphi=p} fds$. $\tilde{f}$ известна в конусе, т.к. преобразование Радона определено и для $\rho>0$ и $\rho<0$.

Ограничиваем функцию $\tilde{f}(\xi,c)\in PW[-1,1]$, если $\operatorname{supp} f\subset\{|x|\leq 1\}$.

$$\begin{gathered}\tilde{f}(\xi,c)=\iint e^{-2\pi i(\xi x+cy)}f(x,y)dxdy=\\ \int e^{-2\pi i(\xi x)}dx\underbrace{\int f(x,y)e^{-2\pi icy}dy}_{x}=\\ \int F(x)e^{-2\pi i\xi x}dx\\ \operatorname{supp}F\subset[-1,1]\end{gathered}$$

Видно, что это функция класса PW и функция известна нам (см. рис.).

$$\frac{a}{c} = \mathrm{ctg}\alpha \quad a = c \cdot \mathrm{ctg}\alpha$$

Если α мало, то $\mathrm{ctg}\alpha$ очень велик, следовательно велико a и мы получаем ошибку $\delta\tilde{f}(0,c) \approx c_k e^{2\pi c \cdot \mathrm{ctg}\alpha}\delta_k$. Если $\mathrm{supp}\, f \subset \{|x| \leq r\}$, то ошибка $\delta\tilde{f}(0,c) \approx c_k e^{2\pi c r \mathrm{ctg}\alpha}\delta_k$, где $e^{2\pi c r \mathrm{ctg}\alpha}$ — норма оператора восстановления $\tilde{f} = 0$, лучше имитировать функцию PW.

26.12.95

Лекция 14

Лучевое преобразование в E^n

Ограничимся сначала аффинной структурой пространства E^n. Обозначим $A(E)$ — многообразие аффинных подпространств аффинного пространства E^n.

$$A(E) = A^0(E) \bigcup A^1(E) \bigcup \ldots \bigcup A^n(E),$$

где $A^i(E)$ — многообразие аффинных подпространств размерности i. В частности $A^0(E) \approx E$, $A^n(E)$ состоит из одного элемента E, $A^{n-1}(E)$ — многообразие гиперплоскостей. Вычислим размерность каждого многообразия $A^i(E)$.

$$\dim A^0(E) = n, \quad \dim A^1(E) = 2(n-1).$$

Упражнение. Найдите $\dim A^i(E)$ при любом i.

Пусть $f \in C_0(E)$. Для любого $\lambda \in A(E)$ $\tilde{R}f(\lambda) = \int f dV_\lambda$, где dV_λ — мера на соответствующей плоскости λ.

$R = \tilde{R}/_{A^{n-1}(E)}$ — преобразование Радона,

$\mathrm{rm\ id} = \tilde{R}/_{A^0(E)}$.

Лучевым преобразованием называется преобразование $L := \tilde{R}/_{A^1(E)}$. На плоскости оно совпадает с преобразованием Радона. В трехмерном пространстве 4 вида преобразований $\tilde{R}$, можно поставить вопрос об обращение каждого, т.е. найти f по $g = \tilde{R}f$. В частности, задача об обращении лучевого преобразования: $g = Lf \mapsto f$. При $n \geq 3$ задача обращения лучевого преобразования переопределена, т.к. $2(n-1) \geq n$. В частности, в $\mathbf{R}^3$ восстанавливается функция 3-х переменных по 4-мерному многообразию данных. Например, достаточно знать интегралы по прямым, лежащим в параллельных плоскостях, рис. 1.

Поэтому можно рассматривать задачу с неполными данными: $\sum \subset A^1(E)$, $\dim \sum = n$, $Lf/_{\sum} \mapsto f$.

Пример 1. При $n = 3$ можно рассмотреть $\sum(H)$ — множество всех прямых, параллельных данной плоскости H, рис. 2.

Пример 2 (Орлов). При $n = 3$ рассмотрим на одиночной сфере кривую Γ, начало и конец которой диаметрально противоположны. Для каждого вектора Θ с началом в O и концом на Γ рассмотрим множество всех прямых, параллельных Θ, рис. 3.

В итоге получается трехмерные многообразия прямых. Оно получается и в случае, если взять лишь часть Γ, но оказывается тогда оно недостаточно для восстановления. (Такое многообразие естественно возникает при рассмотрении мелких объектов; тогда попадающие на них лучи примерно параллельны.

Почему по такому многообразию можно восстановить функцию? См. рис. 4.

$\int\limits_H f dv_2 = \int\limits_{\lambda\subset H} (\int\limits_\lambda f dv_1) d\rho$. Значит, можно узнать преобразование Радона функции f в любой плоскости. Тогда $f(x) = -\frac{1}{8\pi^2}\int \frac{\partial^2}{\partial p^2} Rf(p,\omega)\,/_{p=\omega x}\; d\omega$.

Восстановление не получается, если γ не пересекает все большие окружности сферы (это надо доказывать). Можно комбинировать с формулами интерполяции, пользоваться теоремой отсчетов с лакунами и т.п.

Задача. Если $\dim \Gamma = 1$, то $Lf/_{\sum(\Gamma)} = 0 \Rightarrow f = 0$ (т.е. верна теорема единственности).

Теорема (об условии устойчивого восстановления)

Пусть $\sum \subset A^1(E)$, $\sum$ замкнуто. Для существования метода устойчивого восстановления f по данным на $\sum$, необходимо и достаточно, чтобы $\forall x \in K$, $\forall \omega \in E$ $\exists \lambda \in \sum$: $\lambda \in x$, $\lambda \perp \omega$, здесь $\operatorname{supp} f \subset K \subset\subset E$.

(Это равносильно условию, что некоторая λ из $\sum$ лежит в любой гиперплоскости, проходящей через точку носителя f.)

Пусть $n = 3$. Изучим структуру полного лучевого преобразования. Новая функция определена на многообразии всех прямых в трехмерном пространстве, его размерность 4. Многообразие покрывается несколькими картами. Рассмотрим удобную карту $U(H)$ для этого многообразия, рис. 5.

$A^1(E) = U^4(H) \bigcup \sum^3(H)$, $\sum^3(H)$ — многообразие прямых, параллельных H.

Координаты в U^4 : $\quad \lambda = \lambda(a, b, \alpha, \beta)$, где $(a, b) = \lambda \bigcap H$, $(\alpha, \beta, 1)$ – вектор, параллельный λ.

Тогда $g|_{\bigcup^4(H)} = g(a, b, \alpha, \beta)$ без учета значений на трехмерном многообразии $\sum^3(H)$. Для функции g можно вывести дифференциальные уравнения (уравнения Джона (John)).

$$g(a,b,\alpha,\beta)=\int_{\lambda(a,b,\alpha,\beta)} f dv_1.$$

Параметризация нашей прямой $\lambda(a,b,\alpha,\beta)$:

$$\begin{cases} x=a+t\alpha \\ y=b+t\beta \\ z=t \end{cases}$$

$dv_1=\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}dt$
$\tilde{g}=\frac{g(a,b,\alpha,\beta)}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}}=\int f(a+t\alpha,b+t\beta,t)dt.$

Тогда

$$\frac{\partial\tilde{g}}{\partial a}=\int f'_x(a+t\alpha,b+t\beta,t)dt \qquad \frac{\partial\tilde{g}}{\partial\alpha}=\int tf'_x(a+t\alpha,b+t\beta,t)dt$$
$$\frac{\partial\tilde{g}}{\partial b}=\int f'_y(a+t\alpha,b+t\beta,t)dt \qquad \frac{\partial\tilde{g}}{\partial\beta}=\int tf'_y(a+t\alpha,b+t\beta,t)dt$$
$$\frac{\partial^2\tilde{g}}{\partial\beta\partial a}=\int tf''_{xy}(a+t\alpha,b+t\beta,t)dt=\frac{\partial^2\tilde{g}}{\partial b\partial\alpha},$$

т.е. $\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta\partial a}-\frac{\partial^2}{\partial b\partial\alpha}\right)\tilde{g}=0$. Это уравнение Джона — линейное уравнение 2-го порядка. Рассмотрим его символ $\sigma=\eta u-\xi v$, где u,v,ξ,η – переменные, двойственные к a,b,α,β. Сделаем замену

$$\begin{aligned} u'&=u+\eta \\ u''&=u-\eta \\ v'&=v+\xi \\ v''&=v-\xi. \end{aligned}$$

Тогда $\sigma=1/4({u'}^2-{u''}^2+{v'}^2-{v''}^2)$. Это ультрагиперболическое или ультраволновое уравнение. В отличие от гиперболических, здесь нет такого подпространства, что по начальным условиям Коши на нем можно восстановить решение. Но по некоторым многообразиям можно, см. примеры 1, 2. При этом в отличие от задачи Коши, достаточно использовать только значения Lf, но не нормальной производной. Это потому, что соответствующее многообразие было характеристическим для уравнения Джона, т.е. координаты нормали обращают символ уравнения в нуль. Это необходимое условие для восстановления, т.к. иначе необходимо использовать нормальную производную. Т.о. надо искать многообразия восстановления среди характеристических.

Другие примеры многообразий восстановления.

Пример 3 (Tuy, 1984).

Пусть $n=3$, Γ — кривая, в каждой точке рассматриваем множество прямых (или лучей), проходящих через нее. Получаем трехмерное многообразие $\sum^3(\Gamma)$. Явная формула восстановления имеется при выполнении условия полноты (любая плоскость, пересекающая носитель f, пересекает и Г).

Пример 4 (1993). Пусть S — двумерная поверхность, рассмотрим все прямые, которые где-либо ее касаются. При выполнении условия полноты также есть явная формула восстановления.

Пример **3** можно получить из примера **4**.

Рассмотрим границу трубчатой ε-окрестности кривой $\mathit{\Gamma}$ и все прямые, касающиеся этой поверхности. Есть формула восстановления. При $\varepsilon \to 0$ получим прямые, проходящие через точки $\mathit{\Gamma}$. Примеры **1** и **2** можно получить из **4** при помощи проективных преобразований.