Лекция 3

Упражнение. $\pi_1(S^n) = 0$ при $n \geq 2$.

Зависимость от отмеченной точки. При определении гомотопических групп выделялась отмеченная точка. Что произойдет, если мы выберем другую отмеченную точку? (При этом пространство X считается линейно связным; для несвязного пространства нужно по отдельности рассматривать его компоненты линейной связности.) Существует способ отождествить $\pi_1(X, x_0)$ с $\pi_1(X, x_0')$, но это отождествление определено не однозначно. При отождествлении мы подразумеваем изоморфизм.

Изоморфизм между группами $\pi_1(X, x_0)$ и $\pi_1(X, x_0')$ можно определить следующим образом. Возьмем путь l, соединяющий точкуx_0 с точкой x_0'. Петле в x_0' сопоставим петлю в x_0, которая устроена так:

первая ее треть — путь l от x_0 до x_0',

вторая треть — петля в x_0',

последняя треть — обратный путь l^{-1} из x_0' в x_0.

Легко проверить, что это отображение петель опускается до отображения фундаментальных групп

$$\pi_1(X, x_0') \to \pi_1(X, x_0),$$

то есть гомотопным петлям соответствуют гомотопные петли. Аналогично строится отображение

$$\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0'),$$

с помощью обратного пути l^{-1} из x_0' в x_0.

Легко проверить, что построенные отображения взаимно обратны и сохраняют групповую операцию. В первом случае нужно проверить, что петли $ll^{-1}all^{-1}$ и a гомотопны, а во втором случае нужно проверить, что петли $l^{-1}abl$ и $l^{-1}all^{-1}bl$ гомотопны. В обоих случаях мы пользуемся тем, что участок ll^{-1} можно уничтожить.

Пусть теперь l и l' — два пути из x_0 в x_0'. Посмотрим, как отличаются определяемые ими изоморфизмы. Для этого отобразим $\pi_1(X, x_0')$ в $\pi_1(X, x_0)$ с помощью пути l, а затем отобразим $\pi_1(X, x_0)$ обратно в $\pi_1(X, x_0')$ с помощью пути $(l')^{-1}$. При этом петля a в x_0' переходит сначала в петлю $l^{-1}al$, а затем эта петля переходит в петлю $l'l^{-1}a(l'l^{-1})^{-1}$. Здесь $c = l'l^{-1}$ — петля в x_0'. Таким образом, построенный автоморфизм группы $\pi_1(X, x_0')$ имеет вид $a \mapsto cac^{-1}$, где c — фиксированный элемент группы. Такие автоморфизмы называют внутренними.

Итак, изоморфизм $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0')$ определен с точностью до внутреннего автоморфизма.

Примерно так же можно построить и изоморфизм гомотопических групп $\pi_n(X, x_0')$ и $\pi_n(X, x_0)$. В этом случае сфероиду с началом в точке x_0' нужно сопоставить сфероид с началом в точке x_0. Будем считать, что на сфере отмеченная точка — северный полюс. Рассмотрим сечения сферы плоскостями, параллельными экватору. Каждое такое сечение, лежащее в северном полушарии, стянем в точку (рис. 1).

Рис. 1

В результате получим сферу, к которой приделан отрезок. Этот отрезок отобразим на путь x_0x_0', а сферу отобразим в соответствии с заданным сфероидом в точке x_0'. В результате сфероиду в точке x_0' мы сопоставим сфероид в точке x_0. Это отображение опускается до отображения гомотопических групп

$$\pi_n(X, x_0') \to \pi_n(X, x_0).$$

Отображение групп сохраняет групповую операцию. Обратное отображение получается с помощью обратного пути из x_0' в x_0. Построенный изоморфизм зависит от выбора пути.

Определение. Пусть A и B — топологические пространства с отмеченными точками $a_0 \in A$ и $b_0 \in B$. Рассмотрим несвязное объединение топологических пространств A и B и профакторизуем его по отношению эквивалентности $a_0 \sim b_0$ (то есть склеим точки a_0 и b_0). Полученное топологическое пространство называют **букетом** пространств A и B и обозначают $(A, a_0) \vee (B, b_0)$.

Задача. На группе $\pi_k(S^k \vee S^1)$ автоморфизмы из группы π_1 действуют нетождественно.

На прошлой лекции было введено отношение гомотопической эквивалентности.

Теорема. Пусть пространства X и X' гомотопически эквивалентны. Тогда для любого топологического пространства Y имеется взаимно однозначное соответствие между множествами $\Pi(Y,X)$ и $\Pi(Y,X')$.

(Удобно считать, что Y — пространство с отмеченной точкой и мы рассматриваем гомотопии, сохраняющие отмеченную точку. Формулировка теоремы и ее доказательство верны и для пространств с отмеченной точкой и для пространств без отмеченной точки.)

Требуемое соответствие задается просто композициями с гомотопическими эквивалентностями, то есть отображению $\varphi : Y \to X$ сопоставляем отображение $f \circ \varphi : Y \to X'$, а отображению $\psi : Y \to X'$ сопоставляем отображение $g \circ \psi : Y \to X$. Эти отображения гомотопически взаимно обратны. В самом деле, отображению $\varphi : Y \to X$ их композиция сопоставляет отображение $g \circ f \circ \varphi$, гомотопное φ, так как отображение $g \circ f$ гомотопно тождественному. Ясно также, что гомотопным отображениям φ и φ' сопоставляются гомотопные отображения $f \circ \varphi$ и $f \circ \varphi'$.

Построенное отождествление зависит от выбора гомотопических эквивалентностей f и g.

Это отождествление естественно по Y в следующем смысле. Пусть задано пространство Y' и отображение $\lambda : Y \to Y'$. Тогда возникает отображение $\Pi(Y',X) \to \Pi(Y,X)$, при котором отображению $\varphi' : Y' \to X'$ сопоставляется отображение $\varphi = \varphi'\lambda : Y \to X$. Для пространства Y' тоже имеется отождествление $\Pi(Y',X) \leftrightarrow \Pi(Y',X')$, поэтому в результате получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Pi(Y,X) & \longleftrightarrow & \Pi(Y,X') \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Pi(Y',X) & \longleftrightarrow & \Pi(Y',X') \end{array}.$$

Соответствие называется естественным (функториальным), если такая диаграмма коммутативна, то есть все допустимые комбинации путей по стрелкам приводят к одному и тому же результату. Иными словами, каждый элемент всегда попадает в один и тот же элемент, независимо от пути по стрелкам.

Аналогичным образом гомотопическая эквивалентность между X и X' задает отождествление $\Pi(X,Z)$ с $\Pi(X',Z)$. Это соответствие функториально по Z, то есть для отображения $Z' \to Z$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Pi(X,Z') & \longleftrightarrow & \Pi(X',Z') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi(X,Z) & \longleftrightarrow & \Pi(X',Z) \end{array}$$

коммутативна.

Примеры гомотопических эквивалентных пространств.

1) X и $I \times X$ гомотопически эквивалентны.

2) Лента Мёбиуса гомотопически эквивалентна S^1.

3) Топологическое пространство $GL(\mathbf{R}^n) = GL(n, \mathbf{R})$ (матрицы размером $n \times n$ с ненулевым определителем) гомотопически эквивалентно
(а) $O(\mathbf{R}^n) = O(n, \mathbf{R})$ — ортогональные матрицы;
(б) $SL(n, \mathbf{R})$ — матрицы с определителем 1.

Накрытия

Отображение $p : X \to Y$, где пространство Y линейно связно, называют **накрытием**, если у любой точки $y \in Y$ есть такая окрестность U, что ее прообраз $p^{-1}(U)$ гомеоморфен некоторому количеству экземпляров U (то есть $p^{-1}(U) = U \times \triangle$, где $\triangle$ — дискретное топологическое пространство), причем этот гомеоморфизм согласован с отображением p в том смысле, что естественная проекция на сомножитель $U \times \triangle \to U$ совпадает с отображением p, то есть диаграмма

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & = & U \times \triangle \\ {\scriptstyle p}\searrow & & \swarrow \\ & U & \end{array}$$

коммутативна. Если $\triangle$ состоит из k точек, то накрытие называют k-листным.

Примеры накрытий. (1) $S^k \to \mathbf{R}P^k$.
(2) $S^1 = \{z \in \mathbf{C} \,\big|\, |z| = 1\} \to S^1, \quad z \mapsto z^k$.
(3) $\mathbf{R}^1 \to S^1, \quad t \mapsto \cos t + i \sin t$.

Важным примером накрытия является также накрытие грассманианов. **Многообразием Грассмана** $G_k(\mathbf{R}^n)$ называют множество всех k-мерных подпространств в $\mathbf{R}^n$. **Ориентированным многообразием Гроссмана** $G_k^+(\mathbf{R}^n)$ называют множество всех k-мерных подпространств в $\mathbf{R}^n$ с заданными на них ориентациями.

Например, $G_1(\mathbf{R}^n) = \mathbf{R}P^{n-1}, G_1^+(\mathbf{R}^n) = S^{n-1}, G_{n-1}(\mathbf{R}^n) = \mathbf{R}P^{n-1}$ и вообще $G_k(\mathbf{R}^n) = G_{n-k}(\mathbf{R}^n)$. Последнее отождествление зависит от выбора невырожденной билинейной формы. А отождествление $G_k^+(\mathbf{R}^n) = G_{n-k}^+(\mathbf{R}^n)$ зависит еще и от выбора ориентации в $\mathbf{R}^n$.

Имеется двулистное накрытие $G_k^+(\mathbf{R}^n) \to G_k(\mathbf{R}^n)$ (забывание ориентации); это накрытие обобщает накрытие $S^n \to \mathbf{R}P^n$.

Вопрос. Какие бывают неэквивалентные накрытия над сферой S^2?

Сначала нужно дать определение эквивалентности накрытий. Накрытия $p_1 : X_1 \to Y$ и $p_2 : X_2 \to Y$ называют эквивалентными, если существует такой гомеоморфизм $f : X_1 \to X_2$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \\ {\scriptstyle p_1}\searrow & & \swarrow {\scriptstyle p_2} \\ & Y & \end{array}$$

коммутативна. Гомеоморфизм f отождествляет набор окрестностей $p_1^{-1}(U) = U \times \triangle_1$ с набором окрестностей $p_2^{-1}(U) = U \times \triangle_2$.

Из условия линейной связности базы накрытия Y следует, что дискретное множество $\triangle$ одно и то же для всех точек $y \in Y$. В самом деле, соединим точки $y_1, y_2 \in Y$ некоторым путем. Покроем этот путь окрестностями, участвующими в определении накрытия. Из этого покрытия компактного множества открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие. Ясно, что для точек одной и той же окрестности U множество $\triangle$ одно и то же. Поэтому множество $\triangle$ одно и то же для точек y_1 и y_2. Кроме того, выбор пути однозначно определяет отождествление точек множеств $p^{-1}(y_1)$ и $p^{-1}(y_2)$. Поэтому, если задан путь $\varphi : [0,1] \to Y$ и задана точка $x \in p^{-1}(0)$, то существует единственный путь $\Phi : [0,1] \to X$, для которого $\Phi(0) = x$ и $p\Phi = \varphi$. Путь Φ называют поднятием пути φ; он однозначно определяется начальной точкой x. Поясним еще раз доказательство. Если до какой-то точки окрестности поднятие уже определено, то оно однозначно определено для всех точек окрестности. Поэтому поднятие можно построить, переходя от одной окрестности к другой. А весь путь покрыт конечным числом таких окрестностей.