Лекции 4–5

Клеточные пространства, CW-комплексы. Топология обычно имеет дело лишь с достаточно хорошими топологическими пространствами, а именно, с клеточными пространствами. Другие пространства используются разве что для построения различных контрпримеров.

Клеточные пространства склеиваются из клеток, то есть топологических пространств, гомеоморфныых шару. Прежде чем давать формальное определение, рассмотрим некоторые примеры клеточных пространств.

Тор T^2 можно получить, склеив противоположные стороны квадрата. Это позволяет представить тор как объединение одной 2-мерной клетки, двух 1-мерных клеток и одной 0-мерной клетки.

Для сферы S^2 есть два стандартных клеточных разбиения, которые часто используются. Во-первых, сферу можно представить как объединение 0-мерной клетки и ее дополнения — 2-мерной клетки. Во-вторых, сферу можно разделить экватором на две части, а экватор можно разделить на две части парой диаметрально противоположных точек; в этом разбиении по две клетки размерностей 0, 1 и 2.

При отождествлении диаметрально противоположных точек S^2 из второго клеточного разбиения можно получить клеточное разбиение проективной плоскости $\mathbf{R}P^2$; в этом разбиении по одной клетке размерностей 0, 1 и 2.

Определение. Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство. Структурой клеточного пространства на X называют разбиение пространства X на подмножества B^k_α, гомеоморфные открытым дискам разных размерностей. (Разбиение X — это представление X в виде объединения попарно непересекающихся подмножеств.) Для каждого $B^k_\alpha \subset X$ фиксируется характеристический гомеоморфизм $\chi^k_\alpha : D^k \to B^k_\alpha$, где D^k — открытый k-мерный диск. Требуется, чтобы этот гомеоморфизм допускал продолжение до непрерывного отображения замыкания диска $\overline{D^k} \to X$, причем это отображение должно удовлетворять следующим условиям:

(C) образ границы диска $\overline{D^k}$ принадлежит конечному множеству клеток B^j_β меньших размерностей (то есть $j < k$).

(W) Подмножество $A \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда его пересечение с замыканием любой клетки замкнуто.

Для каждого из рассмотренных нами разбиений T^2, S^2 и $\mathbf{R}P^2$ можно построить соответствующие характеристические гомеоморфизмы.

Важнейшими утверждениями о клеточных пространствах являются лемма Борсука и теорема о клеточной аппроксимации.

Свойство Борсука. Пусть X — топологическое пространство и $A \subset X$. Для отображения $f : X \to Y$ можно рассмотреть его ограничение $f_A : A \to Y$. Пусть задана гомотопия $F_A : A \times I \to Y$ отображения f_A, то есть $F_A(a, 0) = f_A(a)$ при $a \in A$. Если для любого отображения f любую гомотопию F_A можно продолжить до гомотопии $F : X \to Y$ отображения f, то пару пространств (X, A) называют **парой Борсука.**

Лемма Борсука. Если X — клеточное пространство, а $A \subset X$ — клеточное подпространство (то есть объединение некоторых клеток пространства X), то (X, A) — пара Борсука.

Доказательство. При доказательстве многих утверждений о клеточных комплексах используется индукция по размерности клеток. Дело в том, что для клеточного комплекса имеется естественная фильтрация

$$X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \ldots \subset X,$$

где X^0 — объединение всех 0-мерных клеток, X^1 — объединение всех 0-мерных и 1-мерных клеток, X^k — объединение клеток размерности не более k. Комплекс $X^k \subset X$ называют k-мерным остовом комплекса X; его обозначают также $sk_k X$.

Гомотопию, заданную на A, мы сначала продолжим на $A \cup X^0$, затем на $A \cup X^1$ и т.д. Предложим, что гомотопия уже задана на $A \cup X^i$; ее нужно продолжить на все $(i+1)$-мерные клетки комплекса X. Рассмотрим клетку B^{i+1}_α. Пусть $\varphi^{i+1}_\alpha : D^{i+1} \to B^{i+1}_\alpha$ — характеристическое отображение. Для цилиндра $\overline{D}^{i+1} \times [0, 1]$ отображение уже задано на нижнем основании $\overline{D}^{i+1} \times \{0\}$ (как композиция φ^{i+1}_α и исходного отображения $f : X \to Y$). На боковой поверхности цилиндра отображение тоже задано, поскольку образ границы $\overline{D}^{i+1}$ при отображении в X лежит в i-мерном остове, а там гомотопия уже построена по предположению индукции.

Рис. 1

Требуемое отображение $\overline{D}^{i+1} \times [0,1] \to Y$ строим следующим образом. Выберем точку O над центром верхнего основания цилиндра $\overline{D}^{i+1} \times [0,1]$ (рис. 1). Соединим точку O с точкой P нижнего основания или боковой поверхности цилиндра. В точке P отображение задано. Отобразим весь отрезок BP в образ точки P. Доказательство леммы Борсука завершено.

Пусть X и Y — клеточные пространства. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ называют **клеточным**, если $f(sk_n X) \subset sk_n Y$ при $n = 0, 1, 2 \ldots$.

Теорема о клеточной аппроксимации. Любое отображение пары клеточных пространств гомотопно клеточному отображению.

Основная идея доказательства этой теоремы заключается в следующем. Если образ i-мерной клетки пересекает клетку большей размерности, то его можно вытеснить на границу. Мы не будем подробно доказывать теорему о клеточной аппроксимации, хотя и будем ею пользоваться. Сформулируем важное следствие этой теоремы.

Следствие. Для любого клеточного пространства X группа $\pi_i(X)$ изоморфна группе $\pi_i(sk_{i+1})X$.

Мы дали формальное определение клеточных пространств. Неформально их удобно представлять себе как топологические пространства, построенные по индукции приклеиванием клеток. А именно, сначала берется набор точек — 0-мерные клетки. Так получаем 0-мерный остов X^0. Затем берем какое-то количество отрезков и рассматриваем отображения их концов в X^0. По этим отображениям подклеиваем эти отрезки к X^0. Напомним, что если задано отображение $\varphi : A \to Y$, где $A \subset X$, то пространством, полученным в результате подклеивания X к Y по отображению φ, называют пространство

$$Y \cup_\varphi X = Y \cup X \Big/ a \sim \varphi(a).$$

Подклеив отрезки к X^0, получим 1-мерный остов X^1. Затем берем набор 2-мерных дисков и для каждого диска задаем отображение граничной окружности в X^1, причем образ окружности должен пересекаться с конечным числом 0-мерных и 1-мерных клеток. Так получаем 2-мерный остов X^2 и т.д. Отметим, что остов может быть несвязным.

Локальная стягиваемость клеточных пространств.

Топологическое пространство X называют k-связным, если оно линейно связно и группы $\pi_1(X), \pi_2(X), \ldots, \pi_k(X)$ нулевые.

Пусть A — подмножество топологического пространства X. Непрерывное отображение $f : X \to A$ называют **ретракцией,** если f неподвижно на A, то есть $f(a) = a$ при всех $a \in A$. Ретракцию f называют **деформационной ретракцией**, если f гомотопно тождественному отображению. Деформационную ретракцию f называют **строгой деформационной ретракцией**, если гомотопия f_t, связывающая f и id_X, неподвижна на A.

Топологическое пространство X называют **стягиваемым**, если оно гомотопически эквивалентно точке. Эквивалентное определение: X стягиваемо, если существует деформационная ретракция X на точку $* \in X$.

Деформационная ретракция $f : X \to A \subset X$ является гомотопической эквивалентностью между X и A; гомотопически обратным отображением для f служит вложение A в X.

Стягиваемое пространство k-связно при всех k.

Примером строгой деформационной ретракции служит проекция цилиндра $X \times I$ на нижнее основание $X \times \{0\}$.

Почти всегда для построения гомотопической эквивалентности между двумя топологическими пространствами строят либо одну деформационную ретракцию, либо цепочку деформационных ретракций. При этом иногда рассматриваемые пространства вкладывают в бо́льшие пространства в качестве подпространств.

Топологическое пространство X называют **локально k-связным**, если для любой точки $x \in X$ и для любой окрестности U точки x найдется k-связная окрестность точки x, лежащая в U. (0-связность соответствует линейной связности.)

Топологическое пространство X называют **локально стягиваемым**, если для любой точки $x \in X$ и для любой окрестности U точки x найдется стягиваемая окрестность точки x, лежащая в U.

Теорема. Любое клеточное пространство локально стягиваемо.

Доказательство этой теоремы использует в основном аксиому **W**. Доказательство мы не приводим.

Приведем теперь следствия основных трех теорем о клеточных пространствах (теоремы о клеточной аппроксимации, леммы Борсука и теоремы о локальной стягиваемости).

Определение. Клеточной парой (X, Y) называют клеточное пространство X и его клеточное подпространство $Y \subset X$.

Теорема. Пусть (X, Y) — клеточная пара, причем пространство Y стягиваемо. Тогда пространство X/Y гомотопически эквивалентно X.

Доказательство. Пусть $p : X \to X/Y$ — естественная проекция. Нужно построить отображение $X/Y \to X$, гомотопически обратное отображению p. Его мы будем строить с помощью теоремы Борсука. Пусть $f : X \to X$ — тождественное отображение, f_Y — ограничение f на Y. По условию существует гомотопия, связывающая f_Y и отображение Y в точку. Эту гомотопию по теореме Борсука можно продолжить до гомотопии отображения f. Конечное отображение этой гомотопии представляет собой отображение $X \to X$, переводящее Y в точку. Такое отображение можно опустить до отображения $X/Y \to X$. Легко проверить, что построенное отображение гомотопически обратно отображению p.

Теорема. Пусть клеточное пространство X линейно связно и k-связно. Тогда X гомотопически эквивалентно клеточному пространству X', в котором есть ровно одна 0-мерная клетка и нет клеток размерностей $1, 2, \ldots, k$.

Доказательство. Рассмотрим все 0-мерные клетки пространства X и выберем из них одну клетку (точку) в качестве базисной. Соединим базисную точку со всеми остальными 0-мерными клетками отрезками, целиком лежащими в 1-мерном остове X. Для каждого такого отрезка рассмотрим полукруг и подклеим этот полукруг к X по данному отрезку (рис. 2).

Рис. 2

Подклеив таким образом полукруги по всем отрезкам, получим новое пространство. Оно содержит старое пространство в качестве строгого деформационного рефракта, поэтому оба пространства гомотопически эквивалентны. Новое пространство очевидным образом клеточное. Профакторизуем его по объединению верхних границ полукругов. В результате получим пространство с одной 0-мерной клеткой. Но пространство, по которому мы факторизуем, представляет собой набор отрезков с одним общим концом, не имеющих других общих точек. Поэтому оно стягиваемо, а значит, факторпространство гомотопически эквивалентно исходному пространству. (Исходные отрезки, лежащие в X, могут пересекаться и в других точках, поэтому их объединение не обязательно стягиваемо.)

Пусть теперь $k \geq 1$. В таком случае по условию все 1-мерные клетки стягиваемы. Стягивание клетки можно рассматривать как отображение $D^2 \to X$, которое границу D^2 переводит в данную клетку. Возьмем шар D^3 и приклеим его нижнюю половину границы D^2 по отображению $D^2 \to X$. Полученное пространство профакторизуем по объединению верхних половин границ шаров и т.д.

Классификация накрытий. Накрытия $p : X \to Y$ и $p' : X' \to Y'$ называют эквивалентными, если существуют гомеоморфизмы $f : X \to X'$ и $g : Y \to Y'$, для которых $gp = p'f$. Накрытия $p : X \to Y$ и $p' : X' \to Y$ над одной базой Y называют эквивалентными, если существует гомеоморфизм $f : X \to X'$, для которого $p = p'f$.

Для достаточно хороших топологических пространств (в частности, для клеточных комплексов) накрытия находятся во взаимно однозначном соответствии с подгруппами фундаментальной группы, которые рассматриваются с точностью до сопряженности. Для доказательства этого нам потребуется следующее утверждение.

Теорема о накрывающей гомотопии. Рассмотрим накрытие $p : E \to X$. Пусть задано отображение $f : Y \to E$ и задана гомотопия отображения $pf : Y \to X$, то есть отображение $F : Y \times I \to X$, совпадающее с pf на $Y \times \{0\}$. Тогда если пространство Y не слишком плохое (а именно, Y локально линейно связно), то гомотопия F поднимается до гомотопии отображения f, то есть существует отображение $\Phi : Y \times I \to E$, которое:

1) совпадает с f на $Y \times \{0\}$;

2) удовлетворяет соотношению $p\Phi = F$.

Набросок доказательства. Пусть сначала Y состоит из одной точки. В таком случае рассматриваемая гомотопия F представляет собой путь в X. Этот путь поднимается в E.

Если же пространство Y состоит не из одной точки, то для каждой точки этого пространства рассматриваем аналогичным образом путь в X и поднимаем его в E. Нужно лишь проверить, что полученное поднятие непрерывно. Для этого используется локальная линейная связность пространства Y.

Опишем теперь более подробно связь накрытий над X с подгруппами $\pi_1(X)$. Пусть $p : E \to X$ — накрытие над локально односвязным (в частности, локально линейно связным) пространством X. Тогда выполняются следующие свойства:

(1) Отображение $p_* : \pi_1(E) \to \pi_1(X)$ мономорфно.

(2) Имеется взаимно однозначное соответствие между множеством $\pi^{-1}(x_0)$ и множеством смежных классов $\pi_1(X)/p_*\pi_1(E)$.

(3) Для любой подгруппы G в $\pi_1(X)$ существует такое накрытие $p : E \to X$, что $p_*\pi_1(X) = G$.

(4) Рассмотрим накрытия пунктированных пространств, то есть фиксируем точки $e_0 \in E$ и $e'_0 \in E'$.

Будем считать накрытие пунктированных пространств эквивалентными, если гомеоморфизм f переводит e_0 в e'_0. Тогда в пунктированной классификации два накрытия эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$p_*\pi_1(E, e_0) = p_*\pi_1(E', e'_0).$$

(5) При обычном определении эквивалентности два накрытия эквивалентны тогда и только тогда, когда группы $p_*\pi_1(E, e_0)$ и $p_*\pi_1(E', e'_0)$, где $e_0 \in p^{-1}(x_0)$ и $e'_0 \in (p')^{-1}(x_0)$, сопряжены в группе $\pi_1(X, x_0)$.

Приступим к доказательствам.

(1) Нужно доказать, что если γ — петля в E и петля $p\gamma$ стягиваема, то сама петля γ тоже стягиваема. Это непосредственно следует из теоремы о накрывающей гомотопии: стягивание петли $p\gamma$ можно поднять до стягивания петли γ.

(2) Взаимно однозначное соответствие между $p^{-1}(x_0)$ и множеством смежных классов $\pi_1(X)/p_*\pi_1(E)$ возникает при выборе отмеченной точки

$e_0 \in p^{-1}(x_0)$. Рассмотрим всевозможные пути с началом e_0 и концом, принадлежащим $p^{-1}(x_0)$. Проекция такого пути соответствует некоторому элементу $\pi_1(X)$. Конец пути попадает в e_0 тогда и только тогда, когда соответствующий этому пути элемент $\pi_1(X)$ лежит в $p_*\pi_1(X)$. Пути s и s' приходят в одну и ту же точку тогда и только тогда, когда $s's^{-1} \in p_*\pi_1(X)$.

(3) Построим накрытие над X для заданной группы $G \subset \pi_1(X, x_0)$. Рассмотрим множество всех путей в X с началом x_0. Введем на этом множестве следующее отношение эквивалентности: пути s и s' эквивалентны, если выполняются два условия:

1) конец пути s совпадает с концом пути s',

2) петля $s's^{-1}$ лежит в G.

Возникает фактормножество E, для которого определена естественная проекция на X: каждому пути сопоставляется его конец.

Топология в пространстве E задается следующим образом. Пусть x — некоторая точка пространства X, U — ее линейно связная односвязная окрестность, s — некоторый путь из x_0 в x. Паре (s, U) сопоставим множество $U' \subset E$, в которое входят классы эквивалентности путей, состоящих из путей s и некоторого его продолжения, целиком лежащего в U. Всевозможные множества U' образуют базу топологии E. Несложно убедиться, что естественная проекция $p : U' \to U$ является гомеоморфизмом. Эпиморфность p следует из линейной связности U, а мономорфность p следует из односвязности U.