Лекция 6

Относительные гомотопические группы. Рассмотрим тройки пространств (D^i, S^{i-1}, y_0) и (X, A, x_0), где $y_0 \in S^{i-1} = \partial D^i \subset D^i$ и $x_0 \in A \subset X$. **Отображением троек**

$$f : (D^i, S^{i-1}, y_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$$

называют такое отображение $f : D^i \to X$, что $f(S^{i-1}) \subset A$ и $f(y_0) = x_0$. Гомотопию f_t, связывающую отображения f_0 и f_1, называют **гомотопией отображения троек**, если при всех t отображение f_t является отображением троек. Множество классов эквивалентности гомотопных отображений троек

$$(D^i, S^{i-1}, y_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$$

обозначают $\pi_i(X, A, x_0)$.

При $i > 1$ множество $\pi_i(X, A, x_0)$ является группой (i-мерная относительная гомотопическая группа). Для введения групповой структуры на этом множестве нужно переформулировать определение. Рассмотрим тройку $(I^i, \partial I^i, J_i)$, где $J_i = \partial I^i - I^{i-1}$, $\quad I^{i-1}$ — одна из граней куба ∂I^i (имеется в виду открытая грань). Снова рассматриваем отображения троек

$$(I^i, \partial I^i, J_i) \longrightarrow (X, A, x_0).$$

Полученное в результате множество классов эквивалентности находится в естественном взаимно однозначном соответствии с $\pi_i(X, A, x_0)$. Дело в том, что тройки (D^i, S^{i-1}, y_0) и $(I^i, \partial I^i, J_i)$ гомотопически эквивалентны. Пары (X, A) и (Y, B) называют **гомотопически эквивалентными**, если существуют такие отображения пар $f : (X, A) \to (Y, B)$ и $g : (Y, B) \to (X, A)$, что fg и gf гомотопны тождественным отображениям пар, причем гомотопия всегда переводит A в A, B в B. Гомотопическая эквивалентность троек пространств определяется аналогично.

При новом определении множества $\pi_i(X, A, x_0)$ групповая структура на нем вводится следующим образом. Пусть на двух кубах I^i заданы отображения f и g. Сплющим эти кубы и склеим их по паре противоположных граней, отличных от I^{i-1} (рис. 1); при $i \geq 2$ такая пара граней обязательно найдется. Общую грань отображения f и g переводят в точку x_0, поэтому на общей грани отображения согласованы. В результате получаем отображение куба I^i, переводящее ∂I^i в A, а J_i в x_0 (на рис. 1 выделенная грань I^{i-1} заштрихована).

Рис. 1

При $i = 1$ получаем пару отображений отрезка, каждое из которых переводит один конец отрезка в отмеченную точку x_0, а другой конец отрезка эти отображения переводят в некоторые точки $a_1, a_2 \in A$ (рис. 2).

Рис. 2

Нет естественного способа получить их этих двух отображений одно отображение отрезка, переводящее один конец в точку x_0. Поэтому на множестве $\pi_1(X, A, x_0)$ в общем случае нет естественной структуры группы.

Задача. При $i \geq 3$ группа $\pi_i(X, A, x_0)$ абелева.

(Доказательство почти такое же, как и для группы $\pi_i(X, x_0)$ при $i \geq 2$.)

Рис. 3

Нейтральный элемент группы $\pi_i(X, A, x_0)$ определяется как класс эквивалентности постоянного отображения $f : D^i \to x_0$. Принадлежность отображения троек этому классу не всегда удобно проверять. Но достаточно доказать, что $f(D^i) \subset A$. Гомотопия отображения $f : (d^i, S^{i-1}, y_0) \longrightarrow (A, A, x_0)$

в постоянное отображение $(d^i, S^{i-1}, y_0) \longrightarrow (x_0, x_0, x_0)$ строится следующим образом. Рассмотрим гомотетию шара D^i с центром в точке $y_0 \in S^{i-1}$ и с коэффициентом гомотетии t, где $0 < t < 1$. Отображение $f_t : D^i \to A$ устроено так же, как ограничение отображения f на образ шара D^i при рассматриваемой гомотетии (рис. 3). Гомотопия f_t связывает отображение $f = f_1$ с отображением $f_0 : D^i \to x_0$.

Точная гомотопическая последовательность пары

С парой (X, A) связаны три вида гомотопических групп: $\pi_i(A), \pi_i(X)$, $\pi_i(X, A)$. Между этими группами есть естественное отображение. Вложение $A \to X$ индуцирует гомоморфизм $\pi_i(A) \to \pi_i(X)$ (сфероид в A можно рассматривать как сфероид в X).

Отображению $(S^i, y_0) \to (X, x_0)$ можно сопоставить отображение

$$(D^i, S^{i-1}, y_0) \longrightarrow (X, x_0, x_0);$$

для этого сферу S^i нужно представить как факторпространство D^i/S^{i-1}. В результате получим отображение $\pi_i(X) \to \pi_i(X, A)$.

Наконец, отображению $(D^i, S^{i-1}, y_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$ можно сопоставить отображение $(S^{i-1}, y_0) \to (A, x_0)$. В результате получим отображение $\pi_i(X, A) \to \pi_{i-1}(A)$.

Таким образом, получаем бесконечную последовательность гомоморфизмов

$$\ldots \to \pi_i(X, A) \to \pi_{i-1}(A) \to \pi_{i-1}(X) \to \pi_{i-1}(X, A) \to \pi_{i-2}(A) \to \ldots$$

Эта последовательность заканчивается уже не гомоморфизмами, а просто отображениями множеств

$$\pi_1(X) \to \pi_1(X, A) \to \pi_0(A) \to \pi_0(X).$$

Множество $\pi_0(X)$ состоит из классов эквивалентности отображений $S^0 \to X$, переводящих одну точку S^0 в отмеченную точку x_0, а другую точку S_0 — в некоторую точку пространства X. Несложно понять, что элементы множества $\pi_0(X)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с компонентами линейной связности множества X. Есть даже некоторый аналог нейтрального элемента группы, а именно, класс отображений $S^0 \to X$, переводящих обе точки S^0 в одну и ту же компоненту линейной связности множества X (в компоненту, содержащую отмеченную точку x_0).

Последовательность групп и гомоморфизмов

$$G_1 \to G_2 \to \ldots \to G_i \to \ldots$$

называют **точной в члене** G_i, если образ гомоморфизма $G_{i-1} \to G_i$ совпадает с ядром гомоморфизма $G_i \to G_{i+1}$. Последовательность называют **точной**, если она точна в каждом члене.

Часто бывает так, что некоторые группы в точной последовательности известны. Тогда можно получить какую-то информацию и об остальных группах. Например, в точной последовательности

$$0 \to G_{i+1} \to G_{i+2} \to 0$$

отображение $G_{i+1} \to G_{i+2}$ является изоморфизмом групп. В точной последовательности

$$0 \to G_{i+1} \to G_{i+2} \to G_{i+s} \to 0$$

отображение $G_{i+1} \to G_{i+2}$ мономорфно, а отображение $G_{i+2} \to G_{i+3}$ эпиморфно; более того группа G_{i+3} изоморфна факторгруппе $G_{i+2} / \operatorname{Im} G_{i+1}$.

Задача (5-лемма, five-лемма). Даны две точные последовательности групп, включенные в коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccccc} G_1 & \to & G_2 & \to & G_3 & \to & G_4 & \to & G_5 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_1 & \to & H_2 & \to & H_3 & \to & H_4 & \to & H_5 \end{array}.$$

Про отображение $\varphi_i : G_i \to H_i$ известно следующее: φ_1 — эпиморфизм, φ_2 и φ_4 — изоморфизмы, φ_5 — мономорфизм. Доказать, что φ_3 — изоморфизм.

Теорема. Гомотопическая последовательность пары (X, A) точна.

Доказательство сводится к непосредственному применению определений. При этом нужно доказать 6 утверждений типа $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} g$ $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$.

Задача. Отображение пар $(X, A) \to (Y, B)$ таково, что оно индуцирует изоморфизм всех абсолютных гомотопических групп. Доказать, что это отображение индуцирует также и гомоморфизм всех относительных гомотопических групп.

Указание. Воспользуйтесь 5-леммой.

Из теоремы о клеточной аппроксимации следует, что $\pi_i(S^k) = 0$ при $i > k$. В самом деле, представим S^k в виде комплекса с одной 0-мерной клеткой и одной k-мерной клеткой. Тогда $sk_i(S^k)$ состоит из одной точки, а любое отображение $S^i \to S^k$ гомотопно отображению, образ которого лежит в $sk_i(S^k)$.

Известно много способов вычисления $\pi_i(S^i)$ при $i > 1$, но мы обсудим эту задачу позже.

Локально тривиальные расслоения

Понятие накрытия можно обобщить и на тот случай, когда прообраз точки не дискретен. Локально тривиальным расслоением называют четверку (E, B, F, p), где E, B и F — топологические пространства, а $p : E \to B$ — отображение, обладающее следующими свойствами:
1) у любой точки $x \in B$ есть окрестность U, прообраз которой p^{-1} гомеоморфен $U \times F$;
2) гомеоморфизм $U \times F \to p^{-1}(U)$ согласован с отображением p, то есть диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \longrightarrow & p^{-1}(U) \\ & \searrow \quad \swarrow p & \\ & U & \end{array}$$

коммутативна.

Из условия 2), в частности, следует, что прообраз любой точки гомеоморфен F.

Отображение p называют проекцией, пространство E называют пространством расслоения, пространство B — базой расслоения, пространство F — слоем или типичным слоем.

Примеры расслоений. 1. Прямое произведение $B \times F \to B$. Такие расслоения называют тривиальными.

2. Любое накрытие.

3. Лист Мёбиуса — пространство расслоения над S^1 со слоем I. В самом деле, лист Мёбиуса получается при склейке противоположных сторон прямоугольника (рис. 4). Рассмотрим проекцию этого прямоугольника на пунктирную среднюю линию.

Рис. 4

4. Бутылка Клейна — расслоение над S^1 со слоем S^1. Бутылку Клейна мы при этом получаем из листа Мёбиуса отождествлением противоположных концов каждого слоя (отрезка).

5. Расслоение Хопфа: $S^3 \xrightarrow{S^1} S^2$. Сферу S^3 можно представить как множество векторов единичной длины в $\mathbf{C}^2$. Множество комплексных прямых в $\mathbf{C}^2$, проходящих через начало координат, представляет собой одномерное комплексное проективное пространство $\mathbf{C}P^1$. Ясно, что $\mathbf{C}P^1$ гомеоморфно одноточечной комплексификации $\mathbf{C}$, то есть гомеоморфно S^2. Имеется естественное отображение

$$\mathbf{C}^2 - \{0\} \longrightarrow \mathbf{C}P^1,$$

сопоставляющее каждому вектору соответствующую комплексную прямую. При ограничении этого отображения на S^3 получаем проекцию $S^3 \to S^2$. Прообразом каждой точки служит пересечение комплексной прямой с S^3, то есть окружность S^1.

Задача. Доказать, что расслоение Хопфа нетривиально (то есть не сводится к прямому произведению).

Указание. $\pi_1(S^3) \neq \pi_1(S^2 \times S^1)$.

Эквивалентность расслоений. Расслоения $p_1 : E_1 \to B$ и $p_2 : E_2 \to B$ называют **эквивалентными**, если существует такой гомеоморфизм $\varphi : E_1 \to E_2$, что $p_1 = p_2\varphi$.

Если про какое-то пространство E известно, что оно является пространством расслоения с типичным слоем F и базой B, то про структуру E можно сказать не так уж много.

Задача. Отображения $p_1 : T^2 \to S^1$ и $p_2 : T^2 \to S^1$ являются локально тривиальными расслоениями. Обязательно ли эти отображения гомотопны?

Лекция 7

Для тривиального расслоения $p : E \to B$ можно определить тривиализацию как гомеоморфизм $E \to B \times F$, имеющий вид

$$e \mapsto \big(p(e), p_1(e)\big),$$

где $p_1(e) \in F$. Для задания тривиализации нужно лишь задать отображение $p_1 : E \to F$.

Гомеоморфизм тривиализации неединствен. Более того, две тривиализации могут быть не гомотопны. Рассмотрим, например, проекцию тора $T^2 = S^1 \times S^1$ на первый сомножитель S^1. Тривиализация задается проекцией на второй сомножитель. Например, можно взять отображения $(\varphi, \psi) \mapsto \psi$ и $(\varphi, \psi) \mapsto \psi + \varphi$. Образы кривой (φ, ψ_0) на торе при этих отображениях в прямое произведение изображены на рис. 1.

Рис. 1

Докажем теперь две теоремы, сформулированные в конце прошлой лекции.

Теорема Фельдбау. Любое локально тривиальное расслоение над замкнутым шаром D^k тривиализуемо, то есть эквивалентно прямому произведению.

Доказательство. Заменим для удобства диск D^k на замкнутый k-мерный куб I^k. Доказательство приведем в два шага.

Шаг 1. Пусть куб $I^k = I^{k-1} \times I$ разбит на два полукуба $I^k_- = I^{k-1} \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $I^k_+ = I^{k-1} \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Допустим, что над каждым из этих полукубов задана тривиализация, то есть заданы согласованные с проекцией гомеоморфизмы

$$\begin{array}{rcl} p^{-1}(I^k_-) & \approx & F \times I^k_-, \\ p^{-1}(I^k_+) & \approx & F \times I^k_+. \end{array}$$

По этим гомеоморфизмам требуется построить третий гомеоморфизм

$$p^{-1}(I^k) \approx F \times I^k.$$

На множестве $p^{-1}(I^k_-) \subset p^{-1}(I^k)$ этот гомеоморфизм будем считать совпадающим с первым гомеоморфизмом. А на множестве $p^{-1}(I^k_+)$ второй гомеоморфизм нужно подправить так, чтобы оба гомеоморфизма совпали на разделяющей плоскости $I^{k-1} \times \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Если точка a принадлежит разделяющей плоскости, то для $p^{-1}(a)$ заданы два гомеоморфизма на F. Они получаются при ограничении двух заданных гомеоморфизмов на $p^{-1}(a)$. Тем самым возникает гомеоморфизм слоя F на себя (композиция гомеоморфизмов $\psi^{-1} : F \to p^{-1}(a)$ и $\varphi : p^{-1}(a) \to F$).

Гомеоморфизм $p^{-1}(I^k_+)$ на $F \times I^k_+$ можно рассматривать как семейство гомеоморфизмов прообразов точек на типичный слой F, непрерывно зависящее от точки. Для каждой точки I^k_+ нужно взять композицию соответствующего гомеоморфизма и еще одного гомеоморфизма, который получается следующим образом. Рассмотрим проекцию I^k_+ на перегородку $I^{k-1} \times \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Полученной точке перегородки соответствует гомеоморфизм слоя на себя. Беря композицию с этим гомеоморфизмом, мы добиваемся согласованности гомеоморфизмов на перегородке.

Шаг 2. Предположим, что локально тривиальное расслоение над кубом I^k не тривиально. Разделим куб I^k на два параллелепипеда. Согласно шагу 1 расслоение над одним из этих параллелепипедов нетривиально. Разрежем его на два параллелепипеда и т.д. Таким образом можно получить параллелепипед со сколь угодно малыми сторонами, расслоение над которым не тривиально. С другой стороны, последовательность этих параллелепипедов сходится к некоторой точке, а у этой точки есть окрестность, расслоение над которой тривиально. Приходим к противоречию. Конец доказательства.

Упражнение. Верно ли, что любое расслоение со слоем D^k тривиально?

Указание. Рассмотрите лист Мёбиуса; при $k > 1$ можно воспользоваться конструкцией расслоенного произведения.

Определение. Расслоенным произведением расслоений $p : E \to B$ и $p' : E' \to B$ называют расслоение, для которого пространство расслоения состоит из пар (e, e'), где точки $e \in E$ и $e \in E'$ таковы, что $p(e) = p'(e')$; проекция на базу B определяется очевидным образом.

Легко проверить, что слоем построенного расслоения является прямое произведение слоев исходных расслоений.

Теорема о накрывающей гомотопии. Пусть $p : E \to B$ — локально тривиальное расслоение, Z — клеточное пространство. Пусть далее заданы отображение $f : Z \to E$ и гомотопия отображения $pf : Z \to B$. Тогда эту гомотопию можно поднять до гомотопии отображения f.

Удобнее доказывать сразу следующее более общее утверждение.

Теорема. Пусть $p : E \to B$ — локально тривиальное расслоение, (Z, Z') — клеточная пара. Пусть далее заданы отображение $f : Z \to E$, гомотопия $\tilde{F}$ отображения pf и гомотопия Φ' отображения $f|_{Z'}$, которая является поднятием ограничения гомотопии $\tilde{F}$ на $Z' \times I$. Тогда существует гомотопия Φ отображения f, которая является поднятием гомотопии $\tilde{F}$ и продолжением гомотопии Φ'.

(Предыдущая теорема получается, когда Z' — пустое множество.)

Доказательство, как обычно, проводится индукцией по размерности клеток. Оно состоит из трех шагов.

Шаг 1. Пусть расслоение тривиально, то есть $E = B \times F$, $\quad p$ — проекция на первый сомножитель. Тогда отображение $Z \to E$ можно рассматривать как пару отображений $Z \to B$ и $Z \to F$. По условию гомотопия отображения в B уже задана (это — гомотопия $\tilde{F}$). Нужно построить продолжение гомотопии отображения в F. Требуемое продолжение существует в силу теоремы Борсука.

Шаг 2. Пусть теперь расслоение любое , но $Z = D^k$ — замкнутый k-мерный шар. По условию задано отображение $\tilde{F} : D^k \times I \to B$. С помощью этого отображения можно построить индуцированное расслоение над $D^k \times I \approx D^{k+1}$. По теореме Фельдбау это расслоение тривиально. Для индуцированного расслоения $E' \to B$ требуемое продолжение гомотопии существует согласно шагу 1. Рассмотрев его композицию с отображением $E' \to E$, получим требуемое продолжение гомотопии.

Шаг 3. Пусть Z — клеточное пространство, Z' — его i-мерный остов $sk_i Z$. На очередном шаге мы хотим продолжить гомотопию с i-мерного остова на $(i+1)$-мерный остов. Делаем это по отдельности для каждой $(i+1)$-мерной клетки. Каждая такая клетка приклеивается по некоторому отображению $\partial D^{i+1} \longrightarrow sk_i Z$. Поэтому гомотопия, заданная на $sk_i Z$, индуцирует гомотопию, заданную на ∂D^{i+1}. Эту гомотопию нужно продолжить до гомотопии на всем диске D^{i+1}. Именно это делалось на предыдущем шаге . Конец доказательства.

Точная последовательность расслоения. Извлечем теперь из предыдущей теоремы важное следствие. Пусть $p : E \to B$ — локально тривиальное расслоение, $b_0 \in B$ — отмеченная точка, $F = p^{-1}(b_0)$ и $f_0 \in F$ — отмеченная точка. Для пары (E, F) можно рассмотреть относительную гомотопическую группу $\pi_i(E, F)$. Проекция $p : E \to B$ индуцирует гомоморфизм $\pi_i(E, F) \to \pi_i(B)$, поскольку F при этом отображении переходят в отмеченную точку b_0.

Теорема. Гомоморфизм $\pi_i(E, F) \to \pi_i(B)$ является изоморфизмом.

Доказательство. Докажем сначала мономорфность рассматриваемого гомоморфизма, а затем его эпиморфность.

Мономорфность. Пусть α — элемент ядра рассматриваемого гомоморфизма. Он представлен относительным сфероидом $a : D^i \to E. \quad a(\partial D^i) \subset F$. При этом $pa(\partial D^i) = b_0$ и сфероид pa гомотопен тривиальному сфероиду. Эту гомотопию можно поднять до гомотопии сфероида a в пространстве расслоения. Конечное отображение этой гомотопии таково, что его проекция целиком попадает в точку b_0. Поэтому конечное отображение является отображением в слой F. Такое отображение представляет нулевой элемент группы $\pi_i(E, F)$.

Эпиморфность. Абсолютный сфероид $(S^i, s_0) \to (B, b_0)$ можно рассматривать как отображение $f : (D^i, S^{i-1}, s_0) \to (B, b_0, b_0)$. Мы хотим поднять отображение f до отображения $(D^i, S^{i-1}, s_0) \to (E, F, f_0)$.

Рассмотрим покрытие шара D^i однопараметрическим семейством сфер S^{i-1}, получающихся при гомотетии ∂D^i с центром s_0. В том случае, когда

s_0 — начало координат, это покрытие можно представить как отображение $\varphi : S^{i-1} \times I \to D^i$, заданное формулой $\varphi(s, \lambda) = \lambda s$.

Вместо отображения $D^i \to E$ мы будем строить отображение $S^{i-1} \times I$, которое $S^{i-1} \times \{0\}$ отображает в отмеченную точку f_0. Это отображение строится по теореме о накрывающей гомотопии. В качестве клеточного пространства Z мы берем S_{i-1}. Возьмем отображение $Z \to f_0 \in E$. Композиция этого отображения с p отображает Z в $b_0 \in B$. Исходное отображение $f : (D^i, S^{i-1}, s_0) \to (B, b_0, b_0)$ можно рассматривать как гомотопию отображения $Z \to b_0$. У этой гомотопии существует поднятие, то есть отображение $S^{i-1} \times I \to E$, переводящее $S^{i-1} \times \{0\}$ в отмеченную точку f_0. При этом отображении сфера $S^{i-1} \times \{1\}$ отображается в прообраз точки b_0, то есть в слой F. Конец доказательства.

Напомним, что с парой (E, F) связана точная последовательность

$$\ldots \to \pi_i(F) \to \pi_i(E) \to \pi_i(E, F) \to \pi_{i-1}(F) \to \ldots$$

В этой точной последовательности группу $\pi_i(E, F)$ можно заменить на изоморфную ей группу $\pi_i(B)$. В результате получим точную последовательность расслоения

$$\ldots \to \pi_i(F) \to \pi_i(E) \to \pi_i(B) \to \pi_{i-1}(F) \to \ldots$$

Следствие 1. Если $p : E \to B$ — накрытие, то $\pi_i(B) \approx P_i(E)$ при $i \geq 2$. Действительно, у дискретного пространства F гомотопические группы $\pi_i(F)$ тривиальны при $i \geq 1$.

Следствие 2. $\pi_2(S^2) = \mathbf{Z}$. Действительно, запишем точную последовательность для расслоения Хопфа $S^3 \to S^2$ со слоем S^1:

$$\pi_2(S^3) \to \pi_2(S^2) \to \pi_1(S^1) \to \pi_1(S^3).$$

Но $\pi_2(S^3) = \pi_1(S^3) = 0$, поэтому $\pi_2(S^2) = \pi_1(S^1) = \mathbf{Z}$.

Следствие 3. $\pi_3(S^3) \approx \pi_3(S^2)$. Для доказательства нужно записать другой участок точной последовательности для расслоения Хопфа:

$$\pi_3(S^1) \to \pi_3(S^3) \to \pi_3(S^2) \to \pi_2(S^1).$$

Ясно, что $\pi_3(S^1) = \pi_2(S^1) = \mathbf{Z}$.

Впоследствии мы убедимся, что $\pi_3(S^3) = \mathbf{Z}$, а значит, группа $\pi_2(S^3)$ нетривиальна. Это свойство гомотопических групп было открыто Хопфом. Оно пробудило интерес к гомотопическим группам сфер, потому что раньше было распространено мнение, будто нетривиальны лишь группы $\pi_n(S^n)$.

Лекция 8

Гладкие многообразия. Почти 3/4 топологии занимается изучением достаточно хороших топологических пространств, локально устроенных как линейное пространство $\mathbf{R}^n$ подходящей размерности. На этой лекции мы постепенно дадим определение этих пространств, называемых гладкими многообразиями.

Напомним некоторые сведения из курса анализа . Функция $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ принадлежит классу C^r, если при $i \leq r$ все производные $\frac{\partial^i f}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_i}}$ существуют и непрерывны. В таком случае производная не зависит от порядка, в котором выполняется дифференцирование.

Отображение $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ можно представить как набор n функций $y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$. Пусть эти функции r раз дифференцируемы, где $r \geq 1$. **Якобиевой матрицей** отображения F называют матрицу порядка n с элементами $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. **Якобианом** J отображения F называют определитель якобиевой матрицы.

Теорема об обратной функции. Пусть $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — отображение класса C^r, причем для некоторой точки $x \in \mathbf{R}^n$ якобиан отображения F отличен от нуля. Тогда существует окрестность $O(x)$ точки x, окрестность $O\big(F(x)\big)$ точки $F(x)$ и отображение $\Phi : O\big(F(x)\big) \to O(x)$, обратное отображению F. При этом Φ — отображение класса C_r.

Иными словами, ограничение F на $O(x)$ является диффеоморфизмом класса C^r окрестности $O(x)$ на окрестность $O\big(F(x)\big)$; **диффеоморфизмом класса** C^r называют отображение класса C^r, для которого существует обратное отображение, причем оно тоже класса C^r.

Задача. Пусть U — область в $\mathbf{R}^n$, $F : U \to \mathbf{R}^n$ — отображение класса C^r, якобиан которого отличен от нуля во всех точках U. Верно ли, что отображение F обратимо? Верно ли это при $n = 1$?

Хаусдорфово топологическое пространство M со счетной базой называют гладким многообразием класса C^r, $\quad r \geq 1$, если у любой точки $x \in M$ есть окрестность $O(x)$ и гомеоморфизм φ_x, отображающий $O(x)$ на область в $\mathbf{R}^n$. При этом требуется, чтобы на пересечении областей эти гомеоморфизмы были согласованы в следующем смысле. Пусть для точек x и $\tilde{x}$ окрестности $O(x)$ и $O(\tilde{x})$ имеют непустое пересечение. Рассмотрим соответствующие им гомеоморфизмы $\varphi_x : O(x) \to U_x \subset \mathbf{R}^n$ и $\varphi_{\tilde{x}} : O(\tilde{x}) \to U_{\tilde{x}} \subset \mathbf{R}^n$. Можно рассмотреть ограничения этих гомеоморфизмов на $O(x) \cap O(\tilde{x})$. При этом φ_x отображает $O(x) \cap O(\tilde{x})$ на множество $U_{x,\tilde{x}} \subset U_x$, а $\varphi_{\tilde{x}}$ отображает $O(x) \cap O(\tilde{x})$ на множество $U_{\tilde{x}.x} \subset U_{\tilde{x}}$ (рис. 1).

Рис. 1

В результате возникает гомеоморфизм $\varphi_{\tilde{x}}\varphi_x^{-1} : U_{x,\tilde{x}} \to U_{\tilde{x},x}$, отображающий одно открытое множество в $\mathbf{R}^n$ в другое открытое множество в $\mathbf{R}^n$. Требуется, чтобы этот гомеоморфизм был диффеоморфизмом класса C^r.

Определение 1. **Атласом** класса C^r на топологическом пространстве M^n называют покрытие M^n областями $O(x)$ с заданными гомеоморфизмами $\varphi_x : O(x) \to U_x$, где U_x — область в $\mathbf{R}^n$. При этом для всех пересечений $O(x) \cap O(\tilde{x})$ соответствующее отображение $\varphi_{\tilde{x}}\varphi_x^{-1}$ является диффеоморфизмом класса C^r.

Топологическое пространство M^n, на котором есть хотя бы один атлас класса C^r называют гладким многообразием класса C^r.

Область $O(x)$ вместе с фиксированным гомеоморфизмом $\varphi_x : O(x) \to U_x \subset \mathbf{R}^n$ называют **картой на многообразии**. Каждая карта задает так называемые локальные координаты на многообразии.

Определение 2. Два атласа класса C^r называют **эквивалентными**, если их объединение снова является атласом класса C^r. (Объединение двух атласов, разумеется, будет покрытием. Поэтому требуется лишь согласованность гомеоморфизмов на пересечениях.)

Определение 3. **C^r-структурой** на топологическом пространстве M^n называют класс эквивалентных атласов.

Дадим теперь определение гладкого многообразия с краем. В этом случае модельным пространством будет не $\mathbf{R}^n$, а полупространство

$$\mathbf{R}^n_- = \big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \big| x_1 \le 0\big\}.$$

Определение многообразия переносится дословно, но вместо гомеоморфизмов $\varphi_x : O(x) \to U_x \subset \mathbf{R}^n$ берутся гомеоморфизмы $\varphi_x : O(x) \to U_x \subset \mathbf{R}^n_-$, где U_x — область в $\mathbf{R}^n_-$. В $\mathbf{R}^n_-$ типичными примерами открытых множеств являются диски и полудиски (рис. 2).

Рис. 2

Нужно еще дать определение отображения класса C^r. Назовем отображение $\mathbf{R}^n_- \to \mathbf{R}^n_-$ **гладким класса** C^r, если оно является ограничением некоторого отображения класса C^r, определенного на открытом в $\mathbf{R}^n$ множестве, содержащем $\mathbf{R}^n_-$.

Общепринятая в теории гладких многообразий терминология одним термином существенно отличается от терминологии, принятой в общей топологии. А именно, **замкнутым** многообразием называют гладкое компактное многообразие без края.

Если M^m и N^n — многообразия класса C^r, то можно дать определение гладкого отображения $f : M^m \to N^n$ класса C^p, где $p \leq r$. Для этого нужно рассмотреть карту $\varphi : O(x) \to \mathbf{R}^m, \quad x \in M^m$, и карту $\psi : O\big(f(x)\big) \to \mathbf{R}^n$. Возникающее при этом отображение $\psi f \varphi^{-1}$ из $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{R}^n$ должно быть класса C^p для всех карт. При $p > r$ это определение не годится, потому что гладкость отображения будет зависеть от выбора атласа.

Многообразия M^m и N^n называют диффеоморфными, если существует отображение $\varphi : M^m \to N^n$ класса C^r, у которого есть обратное отображение класса C^r.

Задача. Доказать, что следующие топологические пространства являются многообразиями: $S^n, \mathbf{R}P^n$, грассманианы $G_k(\mathbf{R}^n)$ и $G_k^+(\mathbf{R}^n)$.

Ориентация. Атлас называют **ориентирующим**, если у всех отображений перехода $\varphi_{\tilde{x}} \varphi_x^{-1}$ якобиан во всех точках положителен.

Ориентацией на многообразии называют выбор ориентирующего атласа.

Многообразие называют **ориентируемым,** если на нем можно выбрать ориентацию, и **ориентированным**, если ориентация уже выбрана.

Задача. Какие из перечисленных в предыдущей задаче многообразий ориентируемы, а какие неориентируемы?

Касательное пространство. Дадим сначала определение касательных векторов в точке $x \in \mathbf{R}^n$ (обычных векторов с началом в точке x). Но это определение должно быть таким, чтобы с помощью локальных координат его можно было бы сразу перенести на многообразие. Рассмотрим всевозможные отображения $(-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbf{R}^n$ класса C^r, переводящие 0 в x. Пару отображений φ_1 и φ_2 будем считать эквивалентными (в нуле), если

$$\big|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\big| = o(t) \text{ при } t \to 0.$$

Класс эквивалентности по этому отношению эквивалентности называют касательным вектором (в точке x). Множество всех касательных векторов называют касательным пространством (в точке x).

На касательном пространстве имеется естественная структура линейного пространства. В самом деле, возьмем для касательных векторов v_1 и v_2 представляющие их отображения φ_1 и φ_2. Для них можно рассмотреть отображение $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2$, где $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Этому отображению соответствует некоторый вектор, причем он не зависит от выбора представителей φ_1 и φ_2. Этот вектор будем считать вектором $\lambda v_1 + \mu v_2$.

В качестве системы координат в касательном пространстве можно взять частные производные. А именно, можно считать, что вектор

$$\varphi : t \mapsto \big(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\big)$$

имеет координаты

$$\left(\frac{d\varphi_1}{dt}(0), \ldots, \frac{d\varphi_n}{dt}(0)\right).$$

Оказывается, что от выбора локальных координат операции в линейном пространстве не зависят.

Определение касательного пространства для многообразия вводится точно так же с помощью локальной системы координат.

На языке касательных пространств ориентация многообразия соответствует выбору согласованной ориентации всех касательных пространств. В $\mathbf{R}^n$ касательные пространства во всех точках можно отождествить с помощью сдвига. Поэтому в одной карте касательные пространства тоже можно отождествить. В частности, в одной карте можно понять, что означает одинаковая ориентированность касательных пространств.

Попробуем теперь перенести понятие одинаково ориентированных касательных пространств на объединением двух карт U и V. Для этого соответствующими им гомеоморфизмами φ и ψ перенесем их в $\mathbf{R}^n$, а там уже понятно, что такое одинаково ориентированные касательные пространства. Но в результате в точке $x \in U \cap V$ получим, вообще говоря, две разные ориентации — одну ориентацию из касательного пространства в точке $\varphi(x) \in \varphi(U)$, а другую ориентацию — из касательного пространства в точке $\psi(x) \in \psi(V)$. Согласованность этих ориентаций эквивалентна тому, что якобиан отображения $\varphi\psi^{-1}$ в точке x положителен.