Лекция 7

Для тривиального расслоения $p : E \to B$ можно определить тривиализацию как гомеоморфизм $E \to B \times F$, имеющий вид

$$e \mapsto \big(p(e), p_1(e)\big),$$

где $p_1(e) \in F$. Для задания тривиализации нужно лишь задать отображение $p_1 : E \to F$.

Гомеоморфизм тривиализации неединствен. Более того, две тривиализации могут быть не гомотопны. Рассмотрим, например, проекцию тора $T^2 = S^1 \times S^1$ на первый сомножитель S^1. Тривиализация задается проекцией на второй сомножитель. Например, можно взять отображения $(\varphi, \psi) \mapsto \psi$ и $(\varphi, \psi) \mapsto \psi + \varphi$. Образы кривой (φ, ψ_0) на торе при этих отображениях в прямое произведение изображены на рис. 1.

Рис. 1

Докажем теперь две теоремы, сформулированные в конце прошлой лекции.

Теорема Фельдбау. Любое локально тривиальное расслоение над замкнутым шаром D^k тривиализуемо, то есть эквивалентно прямому произведению.

Доказательство. Заменим для удобства диск D^k на замкнутый k-мерный куб I^k. Доказательство приведем в два шага.

Шаг 1. Пусть куб $I^k = I^{k-1} \times I$ разбит на два полукуба $I^k_- = I^{k-1} \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $I^k_+ = I^{k-1} \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Допустим, что над каждым из этих полукубов задана тривиализация, то есть заданы согласованные с проекцией гомеоморфизмы

$$\begin{aligned} p^{-1}(I^k_-) &\approx F \times I^k_-, \\ p^{-1}(I^k_+) &\approx F \times I^k_+. \end{aligned}$$

По этим гомеоморфизмам требуется построить третий гомеоморфизм

$$p^{-1}(I^k) \approx F \times I^k.$$

На множестве $p^{-1}(I^k_-) \subset p^{-1}(I^k)$ этот гомеоморфизм будем считать совпадающим с первым гомеоморфизмом. А на множестве $p^{-1}(I^k_+)$ второй гомеоморфизм нужно подправить так, чтобы оба гомеоморфизма совпали на разделяющей плоскости $I^{k-1} \times \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Если точка a принадлежит разделяющей плоскости, то для $p^{-1}(a)$ заданы два гомеоморфизма на F. Они получаются при ограничении двух заданных гомеоморфизмов на $p^{-1}(a)$. Тем самым возникает гомеоморфизм слоя F на себя (композиция гомеоморфизмов $\psi^{-1} : F \to p^{-1}(a)$ и $\varphi : p^{-1}(a) \to F$).

Гомеоморфизм $p^{-1}(I^k_+)$ на $F \times I^k_+$ можно рассматривать как семейство гомеоморфизмов прообразов точек на типичный слой F, непрерывно зависящее от точки. Для каждой точки I^k_+ нужно взять композицию соответствующего гомеоморфизма и еще одного гомеоморфизма, который получается следующим образом. Рассмотрим проекцию I^k_+ на перегородку $I^{k-1} \times \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Полученной точке перегородки соответствует гомеоморфизм слоя на себя. Беря композицию с этим гомеоморфизмом, мы добиваемся согласованности гомеоморфизмов на перегородке.

Шаг 2. Предположим, что локально тривиальное расслоение над кубом I^k не тривиально. Разделим куб I^k на два параллелепипеда. Согласно шагу 1 расслоение над одним из этих параллелепипедов нетривиально. Разрежем его на два параллелепипеда и т.д. Таким образом можно получить параллелепипед со сколь угодно малыми сторонами, расслоение над которым не тривиально. С другой стороны, последовательность этих параллелепипедов сходится к некоторой точке, а у этой точки есть окрестность, расслоение над которой тривиально. Приходим к противоречию. Конец доказательства.

Упражнение. Верно ли, что любое расслоение со слоем D^k тривиально?

Указание. Рассмотрите лист Мёбиуса; при $k > 1$ можно воспользоваться конструкцией расслоенного произведения.

Определение. Расслоенным произведением расслоений $p : E \to B$ и $p' : E' \to B$ называют расслоение, для которого пространство расслоения состоит из пар (e, e'), где точки $e \in E$ и $e \in E'$ таковы, что $p(e) = p'(e')$; проекция на базу B определяется очевидным образом.

Легко проверить, что слоем построенного расслоения является прямое произведение слоев исходных расслоений.

Теорема о накрывающей гомотопии. Пусть $p : E \to B$ — локально тривиальное расслоение, Z — клеточное пространство. Пусть далее заданы отображение $f : Z \to E$ и гомотопия отображения $pf : Z \to B$. Тогда эту гомотопию можно поднять до гомотопии отображения f.

Удобнее доказывать сразу следующее более общее утверждение.

Теорема. Пусть $p : E \to B$ — локально тривиальное расслоение, (Z, Z') — клеточная пара. Пусть далее заданы отображение $f : Z \to E$, гомотопия $\tilde{F}$ отображения pf и гомотопия Φ' отображения $f|_{Z'}$, которая является поднятием ограничения гомотопии $\tilde{F}$ на $Z' \times I$. Тогда существует гомотопия Φ отображения f, которая является поднятием гомотопии $\tilde{F}$ и продолжением гомотопии Φ'.

(Предыдущая теорема получается, когда Z' — пустое множество.)

Доказательство, как обычно, проводится индукцией по размерности клеток. Оно состоит из трех шагов.

Шаг 1. Пусть расслоение тривиально, то есть $E = B \times F$, $\quad p$ — проекция на первый сомножитель. Тогда отображение $Z \to E$ можно рассматривать как пару отображений $Z \to B$ и $Z \to F$. По условию гомотопия отображения в B уже задана (это — гомотопия $\tilde{F}$). Нужно построить продолжение гомотопии отображения в F. Требуемое продолжение существует в силу теоремы Борсука.

Шаг 2. Пусть теперь расслоение любое , но $Z = D^k$ — замкнутый k-мерный шар. По условию задано отображение $\tilde{F} : D^k \times I \to B$. С помощью этого отображения можно построить индуцированное расслоение над $D^k \times I \approx D^{k+1}$. По теореме Фельдбау это расслоение тривиально. Для индуцированного расслоения $E' \to B$ требуемое продолжение гомотопии существует согласно шагу 1. Рассмотрев его композицию с отображением $E' \to E$, получим требуемое продолжение гомотопии.

Шаг 3. Пусть Z — клеточное пространство, Z' — его i-мерный остов $sk_i Z$. На очередном шаге мы хотим продолжить гомотопию с i-мерного остова на $(i+1)$-мерный остов. Делаем это по отдельности для каждой $(i+1)$-мерной клетки. Каждая такая клетка приклеивается по некоторому отображению $\partial D^{i+1} \longrightarrow sk_i Z$. Поэтому гомотопия, заданная на $sk_i Z$, индуцирует гомотопию, заданную на ∂D^{i+1}. Эту гомотопию нужно продолжить до гомотопии на всем диске D^{i+1}. Именно это делалось на предыдущем шаге . Конец доказательства.

Точная последовательность расслоения. Извлечем теперь из предыдущей теоремы важное следствие. Пусть $p : E \to B$ — локально тривиальное расслоение, $b_0 \in B$ — отмеченная точка, $F = p^{-1}(b_0)$ и $f_0 \in F$ — отмеченная точка. Для пары (E, F) можно рассмотреть относительную гомотопическую группу $\pi_i(E, F)$. Проекция $p : E \to B$ индуцирует гомоморфизм $\pi_i(E, F) \to \pi_i(B)$, поскольку F при этом отображении переходят в отмеченную точку b_0.

Теорема. Гомоморфизм $\pi_i(E, F) \to \pi_i(B)$ является изоморфизмом.

Доказательство. Докажем сначала мономорфность рассматриваемого гомоморфизма, а затем его эпиморфность.

<u>Мономорфность.</u> Пусть α — элемент ядра рассматриваемого гомоморфизма. Он представлен относительным сфероидом $a : D^i \to E$. $\quad a(\partial D^i) \subset F$. При этом $pa(\partial D^i) = b_0$ и сфероид pa гомотопен тривиальному сфероиду. Эту гомотопию можно поднять до гомотопии сфероида a в пространстве расслоения. Конечное отображение этой гомотопии таково, что его проекция целиком попадает в точку b_0. Поэтому конечное отображение является

отображением в слой F. Такое отображение представляет нулевой элемент группы $\pi_i(E,F)$.

Эпиморфность. Абсолютный сфероид $(S^i, s_0) \to (B, b_0)$ можно рассматривать как отображение $f: (D^i, S^{i-1}, s_0) \to (B, b_0, b_0)$. Мы хотим поднять отображение f до отображения $(D^i, S^{i-1}, s_0) \to (E, F, f_0)$.

Рассмотрим покрытие шара D^i однопараметрическим семейством сфер S^{i-1}, получающихся при гомотетии ∂D^i с центром s_0. В том случае, когда s_0 — начало координат, это покрытие можно представить как отображение $\varphi: S^{i-1} \times I \to D^i$, заданное формулой $\varphi(s, \lambda) = \lambda s$.

Вместо отображения $D^i \to E$ мы будем строить отображение $S^{i-1} \times I$, которое $S^{i-1} \times \{0\}$ отображает в отмеченную точку f_0. Это отображение строится по теореме о накрывающей гомотопии. В качестве клеточного пространства Z мы берем S_{i-1}. Возьмем отображение $Z \to f_0 \in E$. Композиция этого отображения с p отображает Z в $b_0 \in B$. Исходное отображение $f: (D^i, S^{i-1}, s_0) \to (B, b_0, b_0)$ можно рассматривать как гомотопию отображения $Z \to b_0$. У этой гомотопии существует поднятие, то есть отображение $S^{i-1} \times I \to E$, переводящее $S^{i-1} \times \{0\}$ в отмеченную точку f_0. При этом отображении сфера $S^{i-1} \times \{1\}$ отображается в прообраз точки b_0, то есть в слой F. Конец доказательства.

Напомним, что с парой (E, F) связана точная последовательность

$$\ldots \to \pi_i(F) \to \pi_i(E) \to \pi_i(E, F) \to \pi_{i-1}(F) \to \ldots$$

В этой точной последовательности группу $\pi_i(E,F)$ можно заменить на изоморфную ей группу $\pi_i(B)$. В результате получим точную последовательность расслоения

$$\ldots \to \pi_i(F) \to \pi_i(E) \to \pi_i(B) \to \pi_{i-1}(F) \to \ldots$$

Следствие 1. Если $p: E \to B$ — накрытие, то $\pi_i(B) \approx P_i(E)$ при $i \geq 2$. Действительно, у дискретного пространства F гомотопические группы $\pi_i(F)$ тривиальны при $i \geq 1$.

Следствие 2. $\pi_2(S^2) = \mathbf{Z}$. Действительно, запишем точную последовательность для расслоения Хопфа $S^3 \to S^2$ со слоем S^1:

$$\pi_2(S^3) \to \pi_2(S^2) \to \pi_1(S^1) \to \pi_1(S^3).$$

Но $\pi_2(S^3) = \pi_1(S^3) = 0$, поэтому $\pi_2(S^2) = \pi_1(S^1) = \mathbf{Z}$.

Следствие 3. $\pi_3(S^3) \approx \pi_3(S^2)$. Для доказательства нужно записать другой участок точной последовательности для расслоения Хопфа:

$$\pi_3(S^1) \to \pi_3(S^3) \to \pi_3(S^2) \to \pi_2(S^1).$$

Ясно, что $\pi_3(S^1) = \pi_2(S^1) = \mathbf{Z}$.

Впоследствии мы убедимся, что $\pi_3(S^3) = \mathbf{Z}$, а значит, группа $\pi_2(S^3)$ нетривиальна. Это свойство гомотопических групп было открыто Хопфом. Оно пробудило интерес к гомотопическим группам сфер, потому что раньше было распространено мнение, будто нетривиальны лишь группы $\pi_n(S^n)$.