Лекция 8

Гладкие многообразия. Почти 3/4 топологии занимается изучением достаточно хороших топологических пространств, локально устроенных как линейное пространство $\mathbf{R}^n$ подходящей размерности. На этой лекции мы постепенно дадим определение этих пространств, называемых гладкими многообразиями.

Напомним некоторые сведения из курса анализа . Функция $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ принадлежит классу C^r, если при $i \leq r$ все производные $\frac{\partial^i f}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_i}}$ существуют и непрерывны. В таком случае производная не зависит от порядка, в котором выполняется дифференцирование.

Отображение $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ можно представить как набор n функций $y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$. Пусть эти функции r раз дифференцируемы, где $r \geq 1$. **Якобиевой матрицей** отображения F называют матрицу порядка n с элементами $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. **Якобианом** J отображения F называют определитель якобиевой матрицы.

Теорема об обратной функции. Пусть $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — отображение класса C^r, причем для некоторой точки $x \in \mathbf{R}^n$ якобиан отображения F отличен от нуля. Тогда существует окрестность $O(x)$ точки x, окрестность $O\big(F(x)\big)$ точки $F(x)$ и отображение $\Phi : O\big(F(x)\big) \to O(x)$, обратное отображению F. При этом Φ — отображение класса C_r.

Иными словами, ограничение F на $O(x)$ является диффеоморфизмом класса C^r окрестности $O(x)$ на окрестность $O\big(F(x)\big)$; **диффеоморфизмом класса** C^r называют отображение класса C^r, для которого существует обратное отображение, причем оно тоже класса C^r.

Задача. Пусть U — область в $\mathbf{R}^n$, $F : U \to \mathbf{R}^n$ — отображение класса C^r, якобиан которого отличен от нуля во всех точках U. Верно ли, что отображение F обратимо? Верно ли это при $n = 1$?

Хаусдорфово топологическое пространство M со счетной базой называют гладким многообразием класса C^r, $\quad r \geq 1$, если у любой точки $x \in M$ есть окрестность $O(x)$ и гомеоморфизм φ_x, отображающий $O(x)$ на область в $\mathbf{R}^n$. При этом требуется, чтобы на пересечении областей эти гомеоморфизмы были согласованы в следующем смысле. Пусть для точек x и $\tilde{x}$ окрестности $O(x)$ и $O(\tilde{x})$ имеют непустое пересечение. Рассмотрим соответствующие им гомеоморфизмы $\varphi_x : O(x) \to U_x \subset \mathbf{R}^n$ и $\varphi_{\tilde{x}} : O(\tilde{x}) \to U_{\tilde{x}} \subset \mathbf{R}^n$. Можно рассмотреть ограничения этих гомеоморфизмов на $O(x) \cap O(\tilde{x})$. При этом φ_x отображает $O(x) \cap O(\tilde{x})$ на множество $U_{x,\tilde{x}} \subset U_x$, а $\varphi_{\tilde{x}}$ отображает $O(x) \cap O(\tilde{x})$ на множество $U_{\tilde{x},x} \subset U_{\tilde{x}}$ (рис. 1).

Рис. 1

В результате возникает гомеоморфизм $\varphi_{\tilde{x}}\varphi_x^{-1} : U_{x,\tilde{x}} \to U_{\tilde{x},x}$, отображающий одно открытое множество в $\mathbf{R}^n$ в другое открытое множество в $\mathbf{R}^n$. Требуется, чтобы этот гомеоморфизм был диффеоморфизмом класса C^r.

Определение 1. **Атласом** класса C^r на топологическом пространстве M^n называют покрытие M^n областями $O(x)$ с заданными гомеоморфизмами $\varphi_x : O(x) \to U_x$, где U_x — область в $\mathbf{R}^n$. При этом для всех пересечений $O(x) \cap O(\tilde{x})$ соответствующее отображение $\varphi_{\tilde{x}}\varphi_x^{-1}$ является диффеоморфизмом класса C^r.

Топологическое пространство M^n, на котором есть хотя бы один атлас класса C^r называют гладким многообразием класса C^r.

Область $O(x)$ вместе с фиксированным гомеоморфизмом $\varphi_x : O(x) \to U_x \subset \mathbf{R}^n$ называют **картой на многообразии**. Каждая карта задает так называемые локальные координаты на многообразии.

Определение 2. Два атласа класса C^r называют **эквивалентными**, если их объединение снова является атласом класса C^r. (Объединение двух атласов, разумеется, будет покрытием. Поэтому требуется лишь согласованность гомеоморфизмов на пересечениях.)

Определение 3. **C^r-структурой** на топологическом пространстве M^n называют класс эквивалентных атласов.

Дадим теперь определение гладкого многообразия с краем. В этом случае модельным пространством будет не $\mathbf{R}^n$, а полупространство

$$\mathbf{R}^n_- = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \big| x_1 \le 0\}.$$

Определение многообразия переносится дословно, но вместо гомеоморфизмов $\varphi_x : O(x) \to U_x \subset \mathbf{R}^n$ берутся гомеоморфизмы $\varphi_x : O(x) \to U_x \subset \mathbf{R}^n_-$, где U_x — область в $\mathbf{R}^n_-$. В $\mathbf{R}^n_-$ типичными примерами открытых множеств являются диски и полудиски (рис. 2).

Рис. 2

Нужно еще дать определение отображения класса C^r. Назовем отображение $\mathbf{R}^n_- \to \mathbf{R}^n_-$ **гладким класса** C^r, если оно является ограничением некоторого отображения класса C^r, определенного на открытом в $\mathbf{R}^n$ множестве, содержащем $\mathbf{R}^n_-$.

Общепринятая в теории гладких многообразий терминология одним термином существенно отличается от терминологии, принятой в общей топологии. А именно, **замкнутым** многообразием называют гладкое компактное многообразие без края.

Если M^m и N^n — многообразия класса C^r, то можно дать определение гладкого отображения $f : M^m \to N^n$ класса C^p, где $p \le r$. Для этого нужно рассмотреть карту $\varphi : O(x) \to \mathbf{R}^m, \quad x \in M^m$, и карту $\psi : O\big(f(x)\big) \to \mathbf{R}^n$. Возникающее при этом отображение $\psi f \varphi^{-1}$ из $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{R}^n$ должно быть класса C^p для всех карт. При $p > r$ это определение не годится, потому что гладкость отображения будет зависеть от выбора атласа.

Многообразия M^m и N^n называют диффеоморфными, если существует отображение $\varphi : M^m \to N^n$ класса C^r, у которого есть обратное отображение класса C^r.

Задача. Доказать, что следующие топологические пространства являются многообразиями: $S^n, \mathbf{R}P^n$, грассманианы $G_k(\mathbf{R}^n)$ и $G_k^+(\mathbf{R}^n)$.

Ориентация. Атлас называют **ориентирующим**, если у всех отображений перехода $\varphi_{\tilde{x}} \varphi_x^{-1}$ якобиан во всех точках положителен.

Ориентацией на многообразии называют выбор ориентирующего атласа.

Многообразие называют **ориентируемым**, если на нем можно выбрать ориентацию, и **ориентированным**, если ориентация уже выбрана.

Задача. Какие из перечисленных в предыдущей задаче многообразий ориентируемы, а какие неориентируемы?

Касательное пространство. Дадим сначала определение касательных векторов в точке $x \in \mathbf{R}^n$ (обычных векторов с началом в точке x). Но это определение должно быть таким, чтобы с помощью локальных координат его можно было бы сразу перенести на многообразие. Рассмотрим всевозможные отображения $(-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbf{R}^n$ класса C^r, переводящие 0 в x. Пару отображений φ_1 и φ_2 будем считать эквивалентными (в нуле), если

$$\big|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\big| = o(t) \text{ при } t \to 0.$$

Класс эквивалентности по этому отношению эквивалентности называют касательным вектором (в точке x). Множество всех касательных векторов называют касательным пространством (в точке x).

На касательном пространстве имеется естественная структура линейного пространства. В самом деле, возьмем для касательных векторов v_1 и v_2 представляющие их отображения φ_1 и φ_2. Для них можно рассмотреть отображение $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2$, где $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Этому отображению соответствует некоторый вектор, причем он не зависит от выбора представителей φ_1 и φ_2. Этот вектор будем считать вектором $\lambda v_1 + \mu v_2$.

В качестве системы координат в касательном пространстве можно взять частные производные. А именно, можно считать, что вектор

$$\varphi : t \mapsto \big(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\big)$$

имеет координаты

$$\left(\frac{d\varphi_1}{dt}(0), \ldots, \frac{d\varphi_n}{dt}(0)\right).$$

Оказывается, что от выбора локальных координат операции в линейном пространстве не зависит.

Определение касательного пространства для многообразия вводится точно так же с помощью локальной системы координат.

На языке касательных пространств ориентация многообразия соответствует выбору согласованной ориентации всех касательных пространств. В $\mathbf{R}^n$ касательные пространства во всех точках можно отождествить с помощью сдвига. Поэтому в одной карте касательные пространства тоже можно отождествить. В частности, в одной карте можно понять, что означает одинаковая ориентированность касательных пространств.

Попробуем теперь перенести понятие одинаково ориентированных касательных пространств на объединением двух карт U и V. Для этого соответствующими им гомеоморфизмами φ и ψ перенесем их в $\mathbf{R}^n$, а там уже понятно, что такое одинаково ориентированные касательные пространства. Но в результате в точке $x \in U \cap V$ получим, вообще говоря, две разные ориентации — одну ориентацию из касательного пространства в точке $\varphi(x) \in \varphi(U)$, а другую ориентацию — из касательного пространства в точке $\psi(x) \in \psi(V)$. Согласованность этих ориентаций эквивалентна тому, что якобиан отображения $\varphi\psi_{-1}$ в точке x положителен.