Лекция 9

Касательное расслоение. Для гладкого многообразия M^n можно рассмотреть множество TM^n, состоящее из всех касательных векторов во всех точках M^n, т.е. элементами TM^n служат пары (x, v), где $x \in M^n$, $v \in T_x M^n$. На множестве TM^n можно естественным образом ввести структуру топологического пространства (и даже структуру гладкого многообразия). Рассмотрим покрытие M^n картами V_α. Для каждой карты гомеоморфизм $\varphi_\alpha : V_\alpha \to U_\alpha \subset \mathbf{R}^n$ определяет взаимно однозначное соответствие между TV_α и TU_α. Но $TU_\alpha = U_\alpha \times \mathbf{R}^n$, поскольку касательные векторы в разных точках $\mathbf{R}^n$ отождествляются с помощью параллельного переноса. На множестве $TU_\alpha = U_\alpha \times \mathbf{R}^n$ имеется естественная структура многообразия (и, тем самым, структура топологического пространства). Эта структура переносится в TV_α. На пересечении карт отображения согласованы (т.е. объединение полученных карт представляет собой гладкий атлас).

Естественную проекцию $TM^n \to M^n$ называют касательным расслоением . Слой этого расслоения имеет структуру линейного пространства размерности n.

Задача. Для любого многообразия M^n его касательное расслоение TM^n ориентируемо, причем есть стандартный способ выбора ориентации.

В дальнейшем мы, как правило, будем рассматривать многообразия класса C^∞.

Риманова структура. Так называют гладкую функцию (класса C^∞) $g : TM^n \to \mathbf{R}$, ограничение которой на любой слой $T_x M^n$ представляет собой положительно определенную квадратичную форму. С помощью квадратичной формы можно определить длину вектора, а именно, длина вектора $V_x \in T_x M^n$ равна $\sqrt{g(v_x)}$.

Теорема. На любом гладком многообразии существует риманова метрика.

Доказательство этой теоремы использует разбиение единицы. Сначала дадим определение паракомпактности. Топологическое пространство X называют **паракомпактным**, если в любое открытое покрытие X можно вписать локально конечное открытое покрытие. (Покрытие $\{V_\alpha\}$ называют **вписанным в покрытие** $\{V_\beta\}$, если любое множество U_β содержит некоторое множество V_α.)

Задача. а) Доказать, что любое многообразие паракомпактно.

б) Доказать, что для n-мерного многообразия можно выбрать открытое покрытие, при котором каждую точку покрывают не более $n + 1$ множеств.

Пусть X — топологическое пространство с заданным локально конечным покрытием $\{V_i\}$. Разбиением единицы (подчиненным данному покрытию) на X называют набор функций λ_i, которые определены на всем X и принимают неотрицательные значения, а кроме того, удовлетворяют следующим условиям:

1) носитель функции λ_i содержится в U_i,

2) для любой точки $x \in X$ выполняется равенство $\sum \lambda_i(x) = 1$ (эта сумма содержит лишь конечное число слагаемых, отличных от нуля).

Напомним, что **носителем функции** λ_i называют замыкание множества тех точек, в которых $\lambda_i \neq 0$.

Теорема. На любом многообразии с любым локально конечным открытым покрытием существует разбиение единицы (подчиненное этому покрытию) с гладкими функциями λ_i класса C^∞.

Доказательства этой теоремы мы приводить не будем. Оно опирается на следующий факт: если $U \subset V$ — открытые области в $\mathbf{R}^n$, причем $\overline{U} \subset V$, то существует гладкая функция f, равная 1 на U и 0 вне V.

Построим теперь риманову метрику на многообразии M. Рассмотрим локально конечное покрытие M картами. В касательное расслоение над каждой картой риманова структура переносится из $\mathbf{R}^n$. В каждой карте определяется длина вектора, но на пересечениях карт длины векторов не согласованы. Чтобы их согласовать, возьмем разбиение единицы $\{\lambda_i\}$, подчиненное рассматриваемому локально конечному покрытию M. В качестве римановой структуры на M возьмем $\sum \lambda_i g_i$. Линейная комбинация положительно определенных квадратичных форм с неотрицательными коэффициентами, не все из которых равны нулю, снова будет положительно определенной квадратичной формой. Поэтому в результате мы действительно получаем глобально определенную риманову структуру.

Риманова структура используется для определения длины кривой на многообразии. Кривую можно задать как отображение $\gamma : [0,1] \to M$. При этом каждому $t \in (0,1)$ соответствует некоторый касательный вектор $v(t)$. Разобьем отрезок [0,1] на n равных отрезков. Пусть t_i — некоторая точка i-го отрезка. Длину кривой можно определить как предел сумм $\frac{1}{n}\sum v(t_i)$ при $n \to \infty$. Этот предел существует. Более того, он не зависит от выбора параметризации γ.

Риманова структура позволяет превратить M в метрическое пространство. Расстояние между точками $x, y \in M$ определяется следующим образом. Рассмотрим всевозможные гладкие (или кусочно гладкие) пути, соединяющие x и y, и возьмем точную нижнюю грань длин этих путей. Это и есть расстояние между точками x и y. Определенную таким образом метрику на M тоже называют римановой метрикой.

Теорема (из курса дифференциальной геометрии). У любой точки многообразия существует малая окрестность, в которой для любых двух точек существует единственный кратчайший путь, соединяющий их.

Этот путь называют **геодезическим путем**.

Пусть M и N — гладкие многообразия, причем M компактно. Тогда на множестве отображений $f : M \to N$ можно ввести C^0-метрику, положив

$$p(f,g) = \sup_{x \in M} r\bigl(f(x), g(x)\bigr),$$

где r — риманова метрика на многообразии N. Если отображения f и g достаточно близки в C^0-метрике, то они гомотопны. В самом деле, если точки $f(x)$ и $g(x)$ достаточно близки, то их можно соединить единственной геодезической. Пусть точка делит длину этой геодезической в отношении $t:(1-t)$. Тогда f_t — гомотопия, связывающая отображения f и g.

Предложение. Любое непрерывное отображение $M^m \to N^n$ сколь угодно хорошо приближается гладким отображением. В частности, оно гомотопно гладкому отображению.

Доказательство этого предложения опирается на теорему Вейерштрасса о том, что любая непрерывная функция на m-мерном кубе сколь угодно хорошо приближается полиномами. Можно даже доказать, что существует сколь угодно хорошее приближение в C^r-метрике, заданной формулой

$$p(f,g) = \max_{\alpha \leq r x \in I^m} \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\alpha}} (f-g) \right|.$$

Предложение доказывается при помощи локальных карт и разбиения единицы.

Таким образом, в случае гладких многообразий при вычислении множества гомотопических классов отображений можно ограничиться гладкими отображениями.

Рассмотрим гладкое отображение $f : M^m \to N^n$ и выберем локальные координаты $x_1, \dots, x_m$ в окрестности точки $x \in M^m$ и локальные координаты $y_1, \dots, y_n$ в окрестности точки $f(x) \in N^n$. В этих локальных координатах отображение f записывается в виде $y_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_m)$.

Определение. Точку $x \in M^m$ называют регулярной точкой отображения f, если ранг якобиевой матрицы $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)$ в точке x максимален, то есть равен $\min(m,n)$.

Легко проверить, что ранг якобиевой матрицы не зависит от выбора локальных координат. Дело в том, что при переходе к другим координатам якобиева матрица умножается слева и справа на невырожденные матрицы.

Для регулярной точки x теорема о неявной функции утверждает, что можно выбрать локальные координаты $x_1, \dots, x_m$ с центром x и локальные координаты $y_1, \dots, y_n$ с центром $f(x)$ так, что в этих координатах отображение f устроено следующим образом:

если $m \geq n$, то $y_1 = x_1, \dots, y_n = x_n$;

если $m \leq n$, то $y_1 = x_1, \dots, y_m = x_m, y_{m+1} = \dots = y_n = 0$.

Определение. При $m \leq n$ гладкое отображение $M^m \to N^n$, все точки которого регулярны, называют **иммерсией** (погружением), а при $m \geq n$ такое отображение называют **субмерсией**.

Пример иммерсии $S^1 \to \mathbf{R}^2$ изображен на рис. 1.

Рис. 1

Если точка $x \in M^m$ не является регулярной точкой отображения $f : M^m \to N^n$, то ее называют особой или критической. Образ множества всех критических точек называют множеством критических значений.

Например, при проекции сферы на плоскость множеством критических точек является экваториальная окружность, а множеством критических значений — проекция экваториальной окружности (рис. 2).

Рис. 2

Лемма Сарда. Множество критических значений гладкого отображения имеет меру нуль.

Наиболее важно такое следствие леммы Сарда: любое гладкое отображение имеет некритические значения. Это свойство позволяет определить степень отображения компактных гладких ориентированных многообразий одной размерности. Возьмем некритическое значение $y \in N^n$ отображения $f : M^n \to N^n$. Тогда все точки множества $f^{-1}(y)$ регулярны. Из компактности множества M^n следует, что множество $f^{-1}(y)$ конечно, то есть $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$. При этом каждой точке x_i можно сопоставить знак якобиана отображения f. Дело в том, что по условию многообразия M^n и N^n ориентированы, то есть в каждой локальной карте задана ориентация. Это позволяет однозначно определить знак якобиана отображения f. Этот знак называют индексом точки x_i.

Теорема. Сумма индексов всех точек множества $f^{-1}(y)$ не зависит от выбора точки y. Более того, индекс не изменяется при замене отображения f на гомотопное ему отображение.

Сумму индексов всех точек множества $f^{-1}(y)$ называют **степенью отображения** f.

Одно из возможных доказательств этой теоремы опирается на теорию особенностей. Нерегулярная точка x отображения f называется **точкой**

складки, если в ее окрестности существуют локальные координаты $x_1, \ldots, x_n$, а в окрестности точки $f(x)$ существуют локальные координаты $y_1, \ldots, y_n$, в которых отображение f имеет вид

$$y_1 = x_1^2, y_2 = x_2, \ldots, y_n = x_n.$$

В случае одномерных многообразий отображение локально представляется как функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Точка x регулярна, если $f'(x) \neq 0$. Простейшая нерегулярная точка x обладает тем свойством, что $f'(x) = 0, f''(x) \neq 0$. Согласно лемме Морса заменой координат такая функция приводится к виду x^2.

Отображение $f : M^n \to N^n$ называется **хорошим**, если его нерегулярные точки, не являющиеся точками складки, принадлежат конечному числу подмногообразий размерности не более $n - 2$.

Из определения точки складки следует, что в окрестности точки складки есть гиперповерхность, состоящая из точек складки. Как правило, более сложные нерегулярные точки расположены на подмногообразиях меньшей размерности. Иными словами, как правило, отображения хорошие. Более точно это формулируется следующим образом.

Теорема. Любое гладкое отображение с любой степенью точности приближается хорошим отображением.

Чтобы доказать теорему о том, что сумма индексов не зависит от выбора точки, приблизим рассматриваемое отображение хорошим отображением. Для хорошего отображения два регулярных значения можно соединить путем, который не проходит через образы точек складки. Таким образом, нужно лишь доказать, что при прохождении через точку складки сумма индексов не изменяется. При этом достаточно рассмотреть лишь одномерный случай, поскольку нерегулярность отображения сказывается лишь на первой координате: $y_1 = x_1^2$.

В одномерном случае при прохождении точки складки происходит переход от двух точек в прообразе к пустому множеству точек (рис. 3).

Рис. 3

Но индексы этих двух точек имеют противоположные знаки, поэтому сумма индексов равна нулю, как и для пустого множества.