Лекция 10

С помощью степени отображения можно получить гомотопическую классификацию отображений $M^n \to S^n$, где M^n — связное компактное ориентируемое многообразие без края. Покажем сначала, что степень отображения не меняется при замене отображения на гомотопное ему отображение. Рассмотрим гомотопию $f_\lambda : M^n \to S^n, \quad \lambda \in [0,1]$. Для каждого $\lambda \in [0,1]$ отображение f_λ имеет некритическое значение. При малом изменении λ количество прообразов этого некритического значения не изменяется и индексы этих точек не изменяются. Следовательно, для каждой точки $\lambda \in [0,1]$ существует такая окрестность U_λ, что для всех $\mu \in U_\lambda$ степень отображения f_μ одна и та же. Из покрытия отрезка $[0,1]$ окрестностями U_λ можно выбрать конечное подпокрытие, поэтому степень отображения f_0 равна степени отображения f_1.

Верно и обратное утверждение, но его доказательство более сложно.

Теорема. Два отображения $M^n \to S^n$ одной и той же степени гомотопны. (Это верно как в категории отображений с отмеченными точками, так и в категории произвольных отображений.)

Мы покажем также, что для произвольного $k \in \mathbf{Z}$ существует отображение $M^n \to S^n$ степени k. Поэтому $\pi_n(S^n) \simeq \mathbf{Z}$.

Доказательство теоремы. В каждом классе отображений с фиксированной степенью k нужно выделить некоторое каноническое отображение, а потом свести к нему остальные отображения с помощью гомотопии.

Будем использовать северный полюс N сферы S^n для определения степени отображения, а южный полюс S будем считать отмеченной точкой. (Мы предполагаем, что N — некритическое значение рассматриваемого отображения; этого всегда можно добиться.) Выберем для точки N достаточно малую окрестность U так, чтобы ее прообраз $f^{-1}(U)$ состоял из непересекающихся окрестностей точек $f^{-1}(N)$ и ограничение отображения f на каждую из этих окрестностей было бы диффеоморфизмом этой окрестности на U (рис. 1).

Рис. 1

Рассмотрим гомотопию g_t тождественного отображения id_{S^n} в отображение $S^n \to S^n$, которое растягивает U на всю сферу, то есть стягивает $S^n - U$ по меридианам в точку S. Рассмотрим далее гомотопию $g_t f$ исходного отображения f. В результате получим отображение, при котором дополнение $f^{-1}(U)$ отображается в точку S, а окрестности точек $f^{-1}(N)$ диффеоморфно отображаются на $S^n - S$.

Мы уже добились некоторого упрощения отображения, но сделано еще далеко не все требуемое. Рассмотрим два диффеоморфизма окрестности точки $f^{-1}(N)$ на $S^n - S$, переводящих $f^{-1}(N)$ в N и имеющих якобианы одного и того же знака. В локальных координатах один диффеоморфизм задается уравнениями $y_1 = f_1(x), \ldots, y_n = f_n(x)$, а другой диффеоморфизм задается уравнениями $y_1 = g_1(x), \ldots, y_n = g_n(x)$. Локальные координаты выберем так, что $f(0) = g(0) = 0$. Тогда $f(x) = Ax + \ldots$, где A — матрица Якоби отображения f в точке 0. Рассмотрим гомотопию $f_\tau = \tau f + (1-\tau)\tilde{f}$, где $\tilde{f}(X) = Ax$. Все отображения f_τ являются локальными диффеоморфизмами (якобиан f_τ в точке 0 не зависит от τ), но, возможно, в меньшей окрестности. Аналогично строим гомотопию, связывающую отображение $g(x)$ и его линейную часть B_x. По условию определители линейных отображений A и B имеют один и тот же знак, поэтому их можно соединить гомотопией. Доказательство получено для некоторой меньшей окрестности, но можно повторить исходный трюк — растянуть с помощью гомотопии полученную окрестность на сфере до $S^n - S$.

Мы получим доказательство в том случае, когда $f^{-1}(N)$ состоит из одной точки. Несложно получить и доказательство в том случае, когда знаки якобианов во всех точках $f^{-1}(N)$ одни и те же. В самом деле, из связности многообразия M^n следует, что связно множество неупорядоченных наборов из k попарно различных точек M^n. Более того, малые шарики с центрами в точках одного набора можно протащить в набор малых шариков с центрами в точках другого набора; это протаскивание можно продолжить до гомотопии тождественного диффеоморфизма M^n. Доказательство использует лишь следующее свойство. Если внутри шара даны две точки, то существует изотопия шара, неподвижная на границе и переводящая первую точку во вторую.

Для завершения доказательства нужно научиться сокращать шарики с якобианами разных знаков. Подтянем два шарика с якобианами разных знаков поближе друг к другу, а затем с помощью гомотопии изменим один шарик так, чтобы он стал зеркально симметричен другому (рис. 2; заштрихованная область отображается в отмеченную точку S).

Рис. 2

Рассмотрим семейство отрезков, перпендикулярных разделяющей шарики перегородке. В левой части отрезка отображение симметрично отображению в правой части отрезка. Иными словами, ограничение отображения на отрезок представляет собой композицию путей γ и γ^{-1}. Для такого отображения можно построить гомотопию в постоянное отображение всего отрезка в образ его концов, то есть в точку S. Это позволяет построить гомотопию рассматриваемого отображения куба с двумя шариками в постоянное отображение куба в точку S, что и требовалось.

несложно построить пример отображения $M^n \to S^n$, имеющего данную степень $\pm k$. Рассмотрим для этого на многообразии M^n попарно непересекающиеся шарики $U_1, \dots, U_k$. Отобразим каждый из этих шариков диффеоморфно на $S^n \to S$ так, чтобы якобиан отображения имел данный знак. Остальную часть многообразия M^n отобразим в отмеченную точку S.

Сечением гладкого расслоения $p : E \to B$ называют такое гладкое отображение $s : B \to E$, что $ps = id_B$. Сечение касательного расслоения $T_* M^n$ называют векторным полем на многообразии M^n. Иными словами, каждой точке $x \in M^n$ сопоставляется касательный вектор, приложенный в этой точке. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений занимается, по сути дела, поиском кривых, касающихся данного векторного поля.

Особой точкой векторного поля называют точку, которой сопоставлен нулевой касательный вектор. Можно доказать, что на сфере S^2 любое векторное поле имеет особую точку.

Особая точка векторного поля называется **изолированной**, если в ее проколотой окрестности нет других особых точек.

На компактном многообразии M^n векторные поля с изолированными особыми точками образуют открытое всюду плотное подмножество в множестве всех векторных полей, то есть почти все векторные поля имеют только изолированные особые точки.

Индекс изолированной особой точки в $\mathbf{R}^n$. Рассмотрим сферу S_ε^{n-1} малого радиуса ε с центром в изолированной особой точке. В каждой точке S_ε^{n-1} возьмем соответствующий вектор векторного поля и параллельно перенесем его в особую точку. Этот вектор укажет некоторую точку на единичной сфере S_1^{n-1}. Таким образом получаем гладкое отображение $S_\varepsilon^{n-1} \to S_1^{n-1}$. Степень этого отображения называют **индексом рассматриваемой особой точки**. От выбора сферы S_ε^{n-1} индекс не зависит (если только внутри этой сферы не окажется еще одна особая точка). В самом деле, при малом шевелении сферы S_ε^{n-1} отображение заменяется на гомотопное, если только сфера не задевает особую точку.

Если есть несколько особых точек, то для каждой из них можно взять маленькую сферу. А кроме того, можно взять окружающую их всех большую сферу (рис. 3). Для этой большой сферы тоже можно аналогичным образом определить индекс относительно векторного поля.

Рис. 3

Теорема. Индекс большой сферы равен сумме индексов особых точек.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда особых точек две. Разделим эти особые точки экваториальной плоскостью (рис. 4).

Рис. 4

В результате большая сфера будет разделена на две полусферы. Для каждой полусферы индекс совпадает с индексом расположенной в ней особой точки. С другой стороны, объединение полусфер можно рассматривать как несвязное многообразие (слегка пошевелив полусферы). Этому многообразию тоже можно сопоставить индекс, рассмотрев отображение в S^{n-1} и взяв прообраз некритического значения. На разделяющей плоскости возникают новые прообразы, но они встречаются парами, причем с противоположными знаками. В результате все новые прообразы дают новый нулевой вклад.

Мы определим индекс особой точки векторного поля в $\mathbf{R}^n$. На многообразии M^n нужно взять локальные координаты и сделать все точно так же.

Задача. Что произойдет с индексом, если мы изменим ориентацию?

Теорема. Пусть M^n — компактное многообразие без края. Тогда сумма индексов особых точек для всех векторных полей с изолированными особыми точками одна и та же.

Одно из возможных доказательств этой теоремы заключается в том, чтобы рассмотреть векторное поле общего положения; у этого векторного поля есть особые точки только хорошего вида. Нужно изучить перестройки общего положения для векторных полей и убедиться, что при любой такой перестройке сумма индексов не изменяется.