Глава 2.

Начала линейной алгебры

2.1. Системы линейных уравнений

Пусть K — произвольное (но фиксированное) поле. Допуская вольность речи, мы будем обычно называть его элементы числами. Если читателю трудно представить себе произвольное поле, он может считать, что $K = \mathbb{R}$, хотя объективно этот случай ничуть не проще общего.

Линейным уравнением с неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем K называется уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

где коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и свободный член b суть элементы поля K. Линейное уравнение называется однородным, если $b = 0$.

Система m линейных уравнений с n неизвестными в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{13}$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей коэффициентов, а матрица

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

— расширенной матрицей системы (13).

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной — в противном случае. Совместная система может иметь одно или более решений. Решить систему уравнений — это значит найти все ее решения.

Подчеркнем, что одно решение системы уравнений с n неизвестными — это упорядоченный набор из n чисел, т. е. элемент пространства K^n.

Существует простой общий метод решения систем линейных уравнений, называемый методом Гаусса. Его идея состоит в приведении любой системы линейных уравнений с помощью некоторых специальных преобразований, называемых элементарными, к эквивалентной системе некоторого простого вида, все решения которой легко найти. Напомним, что две системы уравнений называются эквивалентными, если множества их решений совпадают, т. е. если каждое решение первой из них является решением второй, и наоборот.

Определение 1. Элементарными преобразованиями системы линейных уравнений называются преобразования следующих трех типов:

1) прибавление к одному уравнению другого, умноженного на число;

2) перестановка двух уравнений;

3) умножение одного уравнения на число, отличное от нуля.

Подчеркнем, что при элементарном преобразовании 1-го типа изменяется только одно уравнение — то, к которому прибавляется другое, умноженное на число.

Очевидно, что всякое решение исходной системы уравнений является решением новой системы, полученной элементарным преобразованием. С другой стороны, исходная система уравнений может быть получена из новой системы подходящим элементарным преобразованием того же типа. Так, если мы прибавим к первому уравнению второе, умноженное на c, то можно вернуться назад, прибавив к первому уравнению новой системы ее второе уравнение (которое такое же, как у исходной системы), умноженное на $-c$. Поэтому при любом элементарном преобразовании мы получаем систему уравнений, эквивалентную исходной.

Так как нам удобнее работать не с самими системами линейных уравнений, а с их (расширенными) матрицами, дадим соответствующее определение для матриц.

Определение $1'$. Элементарными преобразованиями строк матрицы A называются преобразования следующих трех типов:

1) прибавление к одной строке другой, умноженной на число;

2) перестановка двух строк;

3) умножение одной строки на число, отличное от нуля.

Очевидно, что всякое элементарное преобразование системы линейных уравнений приводит к соответствующему элементарному преобразованию ее матрицы коэффициентов и расширенной матрицы.

Покажем теперь, что с помощью элементарных преобразований строк любую матрицу можно привести к достаточно простому виду.

Назовем первый отличный от нуля элемент ненулевой строки $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in K^n$ ее ведущим элементом.

Определение 2. Матрица называется ступенчатой, если

1) номера ведущих элементов ее ненулевых строк образуют строго возрастающую последовательность;

2) нулевые строки, если они есть, стоят в конце.

Таким образом, ступенчатая матрица — это матрица вида

$$\begin{pmatrix} & \lfloor a_{1j_1} & & & \\ & & \lfloor a_{2j_2} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lfloor a_{rj_r} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

в которой элементы $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{rj_r}$, находящиеся в углах ступенчатой линии, отличны от нуля, а все элементы, находящиеся слева и снизу от этой линии, равны нулю. При этом $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$.

Теорема 1. Всякую матрицу путем элементарных преобразований строк можно привести к ступенчатому виду.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если данная матрица нулевая, то она уже ступенчатая. Если она ненулевая, то пусть j_1 — номер ее первого ненулевого столбца. Переставив, если нужно, строки, добьемся того, чтобы $a_{1j_1} \neq 0$. После этого прибавим к каждой строке, начиная со второй, первую строку, умноженную на подходящее число, с таким расчетом, чтобы все элементы j_1-го столбца, кроме первого, стали равными нулю. Мы получим матрицу вида

$$\left(\begin{array}{c|c|c} & a_{1j_1} & \\ \cline{2-2} 0 & & A_1 \\ \cline{3-3} \end{array}\right).$$

Поступая таким же образом с матрицей A_1, мы в конце концов получим матрицу вида (14).

Замечание 1. В этом доказательстве мы обошлись без элементарных преобразований 3-го типа. Однако на практике они могут быть полезны.

Пример 1. Приведем к ступенчатому виду матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычитая из 2-й, 3-й и 4-й строк 1-ю строку, умноженную на 1, 2 и 2 соответственно, получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & -4 & -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Далее, прибавляя к 3-й и 4-й строкам 2-ю строку, умноженную на 3 и 4 соответственно, получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Наконец, переставляя 3-ю и 4-ю строки, получаем ступенчатую матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание 2. Предыдущий пример специально подобран таким образом, чтобы $j_1, j_2, \ldots, j_r$ не были просто первыми r членами натурального ряда. Такая ситуация является в определенном смысле исключительной. Например, $j_1 \neq 1$ только при условии, что первый столбец исходной матрицы нулевой. Как правило,

$$j_1 = 1, \quad j_2 = 2, \quad \ldots, \quad j_r = r.$$

В этом случае матрица (14) называется трапецоидальной.

Применим доказанную теорему к решению систем линейных уравнений.

Определение 3. Система линейных уравнений называется ступенчатой, если ее расширенная матрица ступенчатая.

Из теоремы следует, что всякую систему линейных уравнений с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду. Поэтому нам достаточно научиться решать ступенчатые системы.

Введем некоторую терминологию. Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется треугольной, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$, и строго треугольной, если, кроме того, $a_{ii} \neq 0$ при всех i. Система линейных уравнений называется (строго) треугольной, если ее матрица коэффициентов (строго) треугольна.

Рассмотрим теперь произвольную ступенчатую систему линейных уравнений. Пусть число ненулевых строк (число ступенек) ее матрицы коэффициентов равно r, а число ненулевых строк расширенной матрицы равно $\tilde{r}$. Очевидно, что $\tilde{r} = r$ или $r + 1$.

Возможны следующие три принципиально разных случая.

1-й случай: $\tilde{r} = r + 1$. В этом случае система содержит уравнение вида

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b,$$

где $b \neq 0$, и, следовательно, несовместна.

2-й случай: $\tilde{r} = r = n$. В этом случае после отбрасывания нулевых уравнений получается строго треугольная система. Из ее последнего уравнения однозначно определяется x_n, затем из предпоследнего уравнения — x_{n-1} и т. д. Следовательно, система имеет единственное решение.

3-й случай: $\tilde{r} = r < n$. Пусть в этом случае $j_1, j_2, \ldots, j_r$ — номера ведущих коэффициентов ненулевых уравнений системы. Неизвестные $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ назовем главными, а остальные — свободными. После отбрасывания нулевых уравнений и перенесения членов со свободными неизвестными в правую часть получается строго треугольная система относительно главных неизвестных. Решая ее, как в предыдущем случае, находим выражения главных неизвестных через свободные. Эти выражения называют общим решением системы. Все решения системы получаются из общего решения подстановкой каких-то значений свободных неизвестных. Поскольку эти значения могут выбираться произвольно, система имеет, во всяком случае, более одного решения, а если поле K бесконечно — то бесконечно много решений.

Совместная система линейных уравнений называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если она имеет более одного решения. В последнем случае, как следует из проведенного выше анализа, она имеет бесконечно много решений, если только поле K бесконечно. Ее общее решение с точностью до перенумерации неизвестных имеет вид

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = c_{11}x_{r+1} + c_{12}x_{r+2} + \ldots + c_{1,n-r}x_n + d_1, \\ x_2 = c_{21}x_{r+1} + c_{22}x_{r+2} + \ldots + c_{2,n-r}x_n + d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = c_{r1}x_{r+1} + c_{r2}x_{r+2} + \ldots + c_{r,n-r}x_n + d_r. \end{array}\right. \tag{15}$$

Пример 2. Решим систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 &+& 2x_2 &+& x_3 & & &=& 2, \\ x_1 &+& 3x_2 &+& 2x_3 &-& x_4 &=& 4, \\ 2x_1 &+& x_2 &-& x_3 &+& 3x_4 &=& -2, \\ 2x_1 & & &-& 2x_3 &+& x_4 &=& 1. \end{array}\right.$$

расширенной матрицей которой служит матрица из примера 1. Вычисления, проведенные в примере 1, показывают, что данная система эквивалентна ступенчатой системе

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \phantom{{}- x_4} = 2, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ - x_4 = 5. \end{cases}$$

Считая неизвестные x_1, x_2, x_4 главными, а неизвестное x_3 — свободным, перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \phantom{{}- x_4} = -x_3 + 2, \\ x_2 - x_4 = -x_3 + 2, \\ - x_4 = \phantom{-x_3 + {}} 5. \end{cases}$$

Решая ее относительно x_1, x_2, x_4, находим общее решение

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 8, \\ x_2 = -x_3 - 3, \\ x_4 = - 5. \end{cases}$$

Замечание 3. Для единообразия можно считать, что в случае определенной системы все неизвестные являются главными, а свободные неизвестные отсутствуют. Общее решение есть тогда единственное решение системы.

Замечание 4. Строго треугольную матрицу можно путем элементарных преобразований строк привести к единичной матрице. Для этого нужно сначала к каждой строке, кроме последней, прибавить последнюю строку с таким коэффициентом, чтобы элемент последнего столбца стал равным нулю, затем аналогичным образом, прибавляя предпоследнюю строку, сделать равными нулю все элементы предпоследнего столбца, кроме диагонального, и т. д. В результате мы получим диагональную матрицу. Умножая ее строки на подходящие числа, мы получим единичную матрицу. Пользуясь этим, можно при решении системы линейных уравнений не останавливаться на ступенчатом виде, а, продолжив преобразования, привести матрицу коэффициентов при главных неизвестных к единичной матрице. Тогда общее решение просто считывается с полученной матрицы. Эта процедура называется обратным ходом метода Гаусса.

Пример 3. Продолжим преобразование примера 1 предварительно отбросив нулевую строку. Вычтя из 2-й строки 3-ю, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вычтя из 1-й строки удвоенную 2-ю и умножив 3-ю строку на -1, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, система уравнений из примера 2 эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 \qquad = 8, \\ \qquad x_2 + x_3 \qquad = -3, \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = -5. \end{cases}$$

Перенося члены с x_3 в правую часть, получаем уже найденное выше общее решение.

Система однородных линейных уравнений всегда совместна, так как она имеет нулевое решение. Если она определенна, то она имеет только нулевое решение, если неопределенна — то имеет хотя бы одно ненулевое решение (и даже бесконечно много таких решений, если поле K бесконечно). В предыдущих обозначениях, последний случай имеет место, если $r < n$. Пользуясь тем, что всегда $r \leqslant m$, мы приходим к следующей теореме, которая является важным теоретическим следствием метода Гаусса.

Теорема 2. Всякая система однородных линейных уравнений, число уравнений которой меньше числа неизвестных, имеет ненулевое решение.

Неопределенные системы линейных уравнений могут иметь разную «степень неопределенности», каковой естественно считать число свободных неизвестных в общем решении системы. Так, прямая в пространстве задается системой линейных уравнений с одним свободным неизвестным, а плоскость — системой (из одного уравнения) с двумя свободными неизвестными. Ясно, что это принципиально разные случаи. Однако одна и та же система линейных уравнений может допускать различные общие решения, в которых разные неизвестные играют роль свободных, и закономерен вопрос, будет ли число свободных неизвестных всегда одним и тем же. Положительный ответ на этот вопрос дается с помощью понятия размерности векторного пространства, которое будет введено в следующем параграфе.

В оставшейся части этого параграфа мы интерпретируем метод Гаусса на языке умножения матриц.

Прежде всего, если обозначить через X столбец неизвестных, а через B — столбец свободных членов, то систему (13) можно переписать в следующей матричной форме:

$$AX = B. \tag{16}$$

Действительно, матрица AX согласно правилу умножения матриц есть столбец высоты m, i-й элемент которого равен

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n.$$

Приравнивая этот элемент i-му элементу столбца B, мы получаем как раз i-е уравнение системы (13).

Пусть U — какая-либо квадратная матрица порядка m. Умножая обе части уравнения (16) слева на U, мы получаем уравнение

$$UAX = UB. \tag{17}$$

Очевидно, что всякое решение уравнения (16) удовлетворяет и уравнению (17). Если же матрица U обратима, то умножение слева на U^{-1} осуществляет обратный переход от уравнения (17) к уравнению (16) и, следовательно, эти уравнения эквивалентны.

Уравнению (17) соответствует система линейных уравнений с матрицей коэффициентов UA и столбцом свободных членов UB. Легко видеть, что расширенная матрица этой системы равна $U\widetilde{A}$.

Далее, непосредственно проверяется, что элементарные преобразования строк какой-либо матрицы A равносильны ее умножению слева на так называемые элементарные матрицы следующих трех типов:

1) $$\begin{array}{c@{\;}c}
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & \left(\begin{array}{ccccc}
1 & & & \vdots & \\
 & \ddots & & \vdots & \\
\cdots & \cdots & 1 & \cdots\, c & \cdots \\
 & & \ddots & \vdots & \\
 & & & 1 & \\
 & & & \vdots & \ddots \\
 & & & \vdots & 1
\end{array}\right) = E + cE_{ij} \quad (i \neq j); \\
 & \begin{array}{ccccc} & & & j & \end{array}
\end{array}$$

2) $$\begin{array}{c@{\;}c}
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} & \left(\begin{array}{ccccc}
1 & & \vdots & \vdots & \\
 & \ddots & \vdots & \vdots & \\
\cdots & \cdots & 0 & \cdots\, 1 & \cdots \\
 & & \vdots\, \ddots & \vdots & \\
\cdots & \cdots & 1 & \cdots\, 0 & \cdots \\
 & & \vdots & \vdots & \ddots \\
 & & \vdots & \vdots & 1
\end{array}\right) = P_{ij} \quad (i \neq j); \\
 & \begin{array}{ccccc} & & i & j & \end{array}
\end{array}$$

3) $$\begin{array}{c@{\;}c}
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \left(\begin{array}{ccccc}
1 & & \vdots & & \\
 & \ddots & \vdots & & \\
\cdots & \cdots & c & \cdots & \cdots \\
 & & \vdots & \ddots & \\
 & & \vdots & & 1
\end{array}\right) = Q_i(c) \quad (c \neq 0). \\
 & \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array}
\end{array}$$

(Все элементы этих матриц, не выписанные явно, — такие же, как у единичной матрицы.)

Так, например, умножение матрицы A слева на $E + cE_{ij}$ $(i \neq j)$ приводит к тому, что к i-й строке прибавляется j-я строка, умноженная на c (а прочие строки не изменяются).

Все элементарные матрицы обратимы, причем обратные к ним матрицы суть элементарные матрицы, соответствующие обратным элементарным преобразованиям:

$$(E + cE_{ij})^{-1} = E - cE_{ij},$$
$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}, \qquad Q_i(c)^{-1} = Q_i(c^{-1}).$$

Метод Гаусса в матричной интерпретации состоит в последовательном умножении уравнения (16) слева на элементарные матрицы, имеющем целью приведение матрицы A (а также расширенной матрицы $\widetilde{A}$) к ступенчатому виду.

Используя вместо элементарных матриц какие-либо другие матрицы, можно получить другие методы решения систем линейных уравнений, которые, быть может, не столь просты в теоретическом отношении, но, скажем, более надежны при приближенных вычислениях (в случае $K = \mathbb{R}$). Таков, например, метод вращений, при котором в качестве U берутся матрицы вида

$$
\begin{array}{cc}
\begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & & \vdots & & \vdots & & \\
& \ddots & \vdots & & \vdots & & \\
\cdots & \cdots & \cos\alpha & \cdots & -\sin\alpha & \cdots & \cdots \\
& & \vdots & \ddots & \vdots & & \\
\cdots & \cdots & \sin\alpha & \cdots & \cos\alpha & \cdots & \cdots \\
& & \vdots & & \vdots & \ddots & \\
& & \vdots & & \vdots & & 1
\end{pmatrix} \\
& \begin{matrix} & & i & & j & & \end{matrix}
\end{array}
$$

2.2. Базис и размерность векторного пространства

Представление о размерности пространства есть одна из фундаментальных идей математики. В разных разделах математики оно (как и представление о самом пространстве) принимает разные формы. В этом параграфе мы дадим определение размерности векторного пространства и исследуем связанные с этим вопросы.

В §1.7 мы ввели понятие базиса векторного пространства и доказали, что векторное пространство над полем K, имеющее базис из n векторов, изоморфно пространству строк K^n. Размерность векторного пространства определяется как число векторов в его базисе. Однако перед тем как дать такое определение, необходимо ответить на два вопроса: какие векторные пространства обладают базисом и не может ли в векторном пространстве быть двух базисов, состоящих из разного числа векторов.

Чтобы ответить на эти вопросы, нам понадобится ввести некоторые понятия и доказать некоторые утверждения, которые важны и сами по себе.

Пусть V — векторное пространство над полем K.

Линейная комбинация

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n \quad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K)$$

векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$ называется тривиальной, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, и нетривиальной в противном случае.

Определение 1. Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются линейно зависимыми, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю, и линейно независимыми в противном случае.

Подчеркнем, что понятие линейной зависимости (или независимости) относится не к отдельным векторам, а к их совокупностям или, как говорят, системам векторов.

Замечание 1. Понятие системы векторов отличается от понятия множества векторов тем, что, во-первых, векторы системы предполагаются занумерованными и, во-вторых, среди них могут быть равные. Таким образом, система из n векторов — это, в сущности, отображение множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в пространство V. Заметим, однако, что свойство системы векторов быть линейно зависимой или независимой не зависит от нумерации векторов в ней.

Замечание 2. Термин «линейная комбинация» на самом деле употребляется в двух смыслах: как указание действий, которые производятся над данными векторами, что равносильно заданию коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, и как результат этих действий. В выражении «нетривиальная линейная комбинация данных векторов равна нулю» нетривиальность понимается в первом смысле, а равенство нулю — во втором.

Линейная независимость векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ означает, иными словами, что равенство

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = 0$$

выполняется только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Пример 1. Система, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

Пример 2. Система, состоящая из двух векторов, линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы пропорциональны.

Пример 3. Три геометрических вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны (параллельны одной плоскости).

Очевидно, что если система векторов содержит линейно зависимую подсистему, то она сама линейно зависима. Так, например, всякая система векторов, содержащая пропорциональные векторы, линейно зависима.

Лемма 1. Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n > 1)$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них линейно выражается через остальные.

Доказательство. 1) Пусть, например,

$$a_1 = \mu_2 a_2 + \ldots + \mu_n a_n.$$

тогда

$$a_1 - \mu_2 a_2 - \ldots - \mu_n a_n = 0,$$

что показывает линейную зависимость векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

2) Обратно, пусть

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = 0,$$

где не все коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ равны нулю. Допустим для определенности, что $\lambda_1 \neq 0$. Тогда

$$a_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} a_2 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} a_n,$$

т.е. a_1 линейно выражается через $a_2, \ldots, a_n$.

Замечание 3. Неверно, что любой вектор линейно зависимой системы линейно выражается через остальные. Пусть, например, a — какой-нибудь ненулевой вектор. Система $\{a, 0\}$ линейно зависима, так как

$$0a + 1 \cdot 0 = 0,$$

но вектор a, очевидно, не выражается через нулевой вектор.

Лемма 2. Пусть векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно независимы. Вектор b линейно выражается через $a_1, a_2, \ldots, a_n$ тогда и только тогда, когда векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ линейно зависимы.

Доказательство. Если вектор b линейно выражается через $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ линейно зависимы согласно предыдущей лемме. Обратно, пусть

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n + \mu b = 0,$$

причем не все коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu$ равны нулю. Можно утверждать, что $\mu \neq 0$: в противном случае мы получили бы линейную зависимость векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что противоречит условию. Но тогда

$$b = -\frac{\lambda_1}{\mu}a_1 - \frac{\lambda_2}{\mu}a_2 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\mu}a_n.$$

Лемма 3. Пусть вектор b линейно выражается через векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Это выражение единственно тогда и только тогда, когда векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно независимы.

Доказательство. 1) Пусть вектор b допускает два различных выражения через $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = \lambda'_1 a_1 + \lambda'_2 a_2 + \ldots + \lambda'_n a_n.$$

Тогда

$$(\lambda'_1 - \lambda_1)a_1 + (\lambda'_2 - \lambda_2)a_2 + \ldots + (\lambda'_n - \lambda_n)a_n = 0$$

есть линейная зависимость между $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

2) Обратно, пусть

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \ldots + \mu_n a_n = 0$$

есть линейная зависимость между $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тогда если

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n,$$

то также

$$b = (\lambda_1 + \mu_1)a_1 + (\lambda_2 + \mu_2)a_2 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n)a_n,$$

что дает другое выражение b через $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Пусть $S \subset V$ — какое-то подмножество. Совокупность всевозможных (конечных) линейных комбинаций векторов из S называется линейной оболочкой множества S и обозначается через $\langle S \rangle$. Это наименьшее подпространство пространства V, содержащее S (проверьте это!). Говорят, что пространство V порождается множеством S, если $\langle S \rangle = V$.

Определение 2. Векторное пространство называется конечномерным, если оно порождается конечным числом векторов.

Предложение 1 (Основная лемма о линейной зависимости). Если векторное пространство V порождается n векторами, то всякие $m > n$ векторов пространства V линейно зависимы.

Доказательство. Пусть $V = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ и $b_1, b_2, \ldots, b_m$ $(m > n)$ — какие-то векторы пространства V. Выразим их через $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$\begin{cases} b_1 = \mu_{11}a_1 + \mu_{12}a_2 + \ldots + \mu_{1n}a_n, \\ b_2 = \mu_{21}a_1 + \mu_{22}a_2 + \ldots + \mu_{2n}a_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_m = \mu_{m1}a_1 + \mu_{m2}a_2 + \ldots + \mu_{mn}a_n. \end{cases}$$

Для любых $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in K$ получаем отсюда

$$\begin{aligned} \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_m b_m = {} & (\lambda_1\mu_{11} + \lambda_2\mu_{21} + \ldots + \lambda_n\mu_{m1})a_1 + \\ & + (\lambda_1\mu_{12} + \lambda_2\mu_{22} + \ldots + \lambda_n\mu_{m2})a_2 + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (\lambda_1\mu_{1n} + \lambda_2\mu_{2n} + \ldots + \lambda_n\mu_{mn})a_n. \end{aligned}$$

Рассмотрим систему n однородных линейных уравнений с m неизвестными:

$$\begin{cases} \mu_{11}x_1 + \mu_{21}x_2 + \ldots + \mu_{m1}x_m = 0, \\ \mu_{12}x_1 + \mu_{22}x_2 + \ldots + \mu_{m2}x_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mu_{1n}x_1 + \mu_{2n}x_2 + \ldots + \mu_{mn}x_m = 0. \end{cases}$$

Если $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ — любое решение этой системы, то

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_m b_m = 0.$$

С другой стороны, по теореме 2.2 эта система имеет ненулевое решение. Следовательно, векторы $b_1, b_2, \ldots, b_m$ линейно зависимы.

Ввиду леммы 3 определение 1.7.4 базиса векторного пространства можно переформулировать следующим образом.

Определение 3. Базисом векторного пространства V называется всякая линейно независимая система векторов, порождающая пространство V.

Теорема 1. Всякое конечномерное векторное пространство V обладает базисом. Более точно, из всякого конечного порождающего множества $S \subset V$ можно выбрать базис пространства V.

Доказательство. Если множество S линейно зависимо, то по лемме 1 в нем найдется вектор, линейно выражающийся через остальные. Выкидывая этот вектор, мы получаем порождающее множество из меньшего числа векторов. Продолжая так дальше, мы в конце концов получим линейно независимое порождающее множество, т. е. базис.

Теорема 2. Все базисы конечномерного векторного пространства V содержат одно и тоже число векторов.

Это число называется размерностью пространства V и обозначается $\dim V$.

Доказательство. Если бы в пространстве V существовали два базиса из разного числа векторов, то согласно предложению 1 тот из них, в котором больше векторов, был бы линейно зависим, что противоречит определению базиса.

Замечание 4. Нулевое векторное пространство (состоящее из одного нулевого вектора) считается обладающим «пустым базисом»; в соответствии с этим его размерность считается равной нулю.

Пример 4. Пространство E^2 (соотв. E^3) имеет размерность 2 (соотв. 3).

Пример 5. Ввиду примера 1.7.7 пространство K^n имеет размерность n.

Пример 6. Поле комплексных чисел как векторное пространство над $\mathbb{R}$ имеет размерность 2, а алгебра кватернионов (см. пример 1.8.6) — размерность 4.

Пример 7. Если X — конечное множество из n элементов, то векторное пространство $F(X,K)$ всех функций на X со значениями в K (см. пример 1.7.2) имеет размерность n. В самом деле, рассмотрим так называемые δ-функции δ_a $(a \in X)$ определяемые формулами

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = a, \\ 0 & \text{при } x \neq a. \end{cases}$$

Очевидно, что любая функция $\varphi \in F(X,K)$ единственным образом выражается через δ-функции, а именно,

$$\varphi = \sum_{a \in X} \varphi(a)\delta_a.$$

Следовательно, функции δ_a, $a \in X$, составляют базис пространства $F(X, K)$, причем координатами функции в этом базисе служат ее значения. Если множество X бесконечно, то для любого n в пространстве $F(X, K)$ имеется n линейно независимых векторов, например, $\delta_{a_1}, \delta_{a_2}, \ldots, \delta_{a_n}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n \in X$ различны; следовательно, пространство $F(X, K)$ бесконечномерно.

Пример 8. Поле $\mathbb{R}$ как векторное пространство над $\mathbb{Q}$ бесконечномерно. В самом деле, если бы оно было конечномерно, то действительное число определялось бы конечным набором рациональных чисел — своих координат в некотором базисе этого пространства. Но тогда множество всех действительных чисел было бы счетно, что неверно.

Задача 1. Найти число векторов n-мерного векторного пространства над конечным полем из q элементов.

Задача 2. Доказать, что пространство всех непрерывных функций на любом промежутке числовой прямой бесконечномерно.

Из основной леммы о линейной зависимости (предложение 1) следует, что в любом (конечном или бесконечном) множестве S векторов конечномерного векторного пространства V имеется максимальное линейно независимое подмножество, т. е. такое линейно независимое подмножество, которое становиться линейно зависимым при добавлении к нему любого из оставшихся векторов множества S. Более того, любое линейно независимое подмножество множества S можно дополнить до максимального линейно независимого подмножества.

Предложение 2. Всякое максимальное линейно независимое подмножество $\{e_1, \ldots, e_k\}$ множества S является базисом линейной оболочки $\langle S \rangle$ этого множества.

Доказательство. Нужно доказать, что каждый вектор из $\langle S \rangle$ линейно выражается через $e_1, \ldots, e_k$. По определению линейной оболочки каждый вектор из $\langle S \rangle$ линейно выражается через векторы из S. Поэтому достаточно доказать, что каждый вектор $a \in S$ линейно выражается через $e_1, \ldots, e_k$. Для $a \in \{e_1, \ldots, e_k\}$ это очевидно. Для $a \notin \{e_1, \ldots, e_k\}$ это следует из леммы 2.

Применяя высказанные соображения к $S = V$, мы получаем следующию теорему.

Теорема 3. Всякую линейно независимую систему векторов конечномерного векторного пространства V можно дополнить до базиса.

В частности, любой ненулевой вектор можно включить в базис, а любые n линейно независимых векторов n-мерного векторного пространства уже составляют базис.

Задача 3. Найти число базисов n-мерного векторного пространства над полем из q элементов.

Следующая теорема устанавливает свойство монотонности размерности.

Теорема 4. Всякое подпространство U конечномерного векторного пространства V также конечномерно, причем $\dim U \leqslant \dim V$. Более того, если $U \neq V$, то $\dim U < \dim V$.

Доказательство. Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ — максимальная линейно независимая система векторов подпространства U. Согласно предложению 2 $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ — базис U. Следовательно, $\dim U = k$. Линейно независимую систему $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ можно дополнить до базиса всего пространства V. Следовательно, если $U \neq V$, то $\dim V > k$.

Задача 4. Найти число k-мерных подпространств n-мерного векторного пространства над полем из q элементов.

Следующая теорема дает исчерпывающее описание всех конечномерных векторных пространств.

Теорема 5. Конечномерные векторные пространства над одним и тем же полем изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.

Доказательство. Пусть $f\colon V \to U$ — изоморфизм векторных пространств и $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис V, тогда $\{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\}$ — базис U, так что $\dim V = \dim U$. Обратно, согласно предложению 1.7.1 всякое n-мерное векторное пространство над полем K изоморфно K^n; следовательно, все такие пространства изоморфны между собой.

Таким образом, в любом рассуждении мы вправе заменить произвольное n-мерное векторное пространство над полем K пространством строк K^n. В пространстве K^n имеется «привилегированный» базис, состоящий из единичных строк (см. пример 1.7.7). С другой стороны, если в каком-либо n-мерном векторном пространстве V задан базис, то сопоставление каждому вектору строки его координат (как в доказательстве предложения 1.7.1) определяет канонический изоморфизм пространства V и пространства K^n, при котором векторам заданного базиса соответствуют единичные строки. В этом смысле можно сказать, что пространство строк — это не что иное, как конечномерное векторное пространство с выделенным базисом.

Совокупность всех базисов n-мерного векторного пространства V может быть описана следующим образом. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — какой-либо фиксировнный базис. Любая система n векторов $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ может быть тогда задана квадратной матрицей $C = (c_{ij})$, определяемой равенствами

$$e'_j = \sum_i e_i c_{ij} \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{18}$$

и называемой матрицей перехода от базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ к системе $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$. Согласно этому определению, j-й столбец матрицы C есть столбец координат вектора e'_j в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Поэтому векторы $e'_1, \ldots, e'_n$ линейно независимы (и, значит, составляют базис) тогда и только тогда, когда столбцы матрицы C линейно независимы, т. е. когда матрица C невырожденна. Тем самым установлено взаимно однозначное соответствие между множеством всех базисов пространства V и множеством невырожденных матриц порядка n.

Если распространить правило умножения матриц на случай, когда элементами одной из них являются векторы (что имеет смысл ввиду операций, определенных в векторном пространстве), то равенства (18) могут быть переписаны в следующей матричной форме:

$$(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C. \tag{19}$$

Пусть $x \in V$ — какой-либо вектор. Разложим его по базисам $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$:

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = x'_1 e'_1 + \ldots + x'_n e'_n.$$

Положим

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$x = (e'_1, \ldots, e'_n)X' = (e_1, \ldots, e_n)CX',$$

откуда получается следующая формула преобразования координат при переходе от базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ к базису $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$:

$$X = CX', \tag{20}$$

или, более подробно,

$$x_i = \sum_j c_{ij} x'_j \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{21}$$

Понятия базиса и размерности могут быть распространены на бесконечномерные векторные пространства. Чтобы это сделать, надо определить, что такое линейная комбинация бесконечной системы векторов. В чисто алгебраической ситуации нет иного выхода, кроме как ограничиться рассмотрением линейных комбинаций, в которых лишь конечное число коэффициентов отлично от нуля.

Пусть $\{\, a_i : i \in I \,\}$ — система векторов, занумерованных элементами бесконечного множества I. Линейной комбинацией векторов $a_i, i \in I$, называется выражение вида $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i a_i$, в котором лишь конечное число коэффициентов λ_i отлично от нуля, так что сумма фактически является конечной и тем самым имеет смысл. На основе этого определения линейной комбинации точно так же, как в случае конечных систем векторов, определяются понятия линейной выражаемости, линейной зависимости и базиса.

Мощность базиса называется размерностью пространства. В частности, векторное пространство, обладающее счетным базисом, называется счетномерным.

Пример 9. Очевидно, что множество всех последовательностей (строк бесконечной длины) из элементов поля K является векторным пространством относительно операций сложения и умножения на элементы поля K, определяемых так же, как для строк конечной длины. Последовательность называется финитной, если лишь конечное число ее членов отлично от нуля. Финитные последовательности образуют подпространство в пространстве всех последовательностей. Обозначим его через K^∞. В качестве его базисных векторов можно взять последовательности вида

$$e_i = (0, \ldots, 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots) \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

(единица стоит на i-м месте). Таким образом, пространство K^∞ счетномерно.

Так же, как предложение 1.7.1, доказывается, что всякое счетномерное векторное пространство над K изоморфно K^∞.

Задача 5. Доказать, что поле $\mathbb{R}$ как векторное пространство над $\mathbb{Q}$ не является счетномерным.

Задача 6. Доказать, что из всякого счетного порождающего множества векторного пространства можно выбрать базис.

Задача 7. Доказать, что любое несчетное множество векторов в счетномерном векторном пространстве линейно зависимо (и, следовательно, любой базис счетен).

Задача 8. Доказать, что всякую (конечную или счетную) линейно независимую систему векторов счетномерного векторного пространства можно дополнить до базиса.

Задача 9. Доказать, что всякое подпространство счетномерного векторного пространства не более чем счетномерно (т. е. счетномерно или конечномерно). Привести пример счетномерного подпространства счетномерного векторного пространства, не совпадающего со всем пространством.

Задачи 6–9 представляют собой аналоги теорем 1–4 для счетномерных векторных пространств. Аналогичные утверждения могут быть доказаны и для несчетномерных пространств, но для этого требуется привлечение аппарата канторовской теории множеств (трансфинитной индукции или леммы Цорна). С другой стороны, такой чисто алгебраический подход имеет ограниченную сферу применения. Обычно несчетномерное векторное пространство снабжается топологией, которая позволяет придавать смысл бесконечным суммам векторов.

С понятием размерности тесно связаны понятия ранга системы векторов и ранга матрицы.

Определение 4. Рангом системы векторов называется размерность ее линейной оболочки. Рангом матрицы называется ранг системы ее строк.

Ранг матрицы A обозначается через $\operatorname{rk} A$.

Системы векторов $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ называются эквивалентными, если каждый из векторов b_j линейно выражается через $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и, наоборот, каждый из векторов a_i линейно выражается через $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Это, очевидно, равносильно совпадению линейных оболочек:

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle = \langle b_1, b_2, \ldots, b_m\rangle.$$

Поэтому ранги эквивалентных систем векторов равны.

Из определения элементарных преобразований следует, что строки матрицы A', полученной из матрицы A каким-либо элементарным преобразованием, линейно выражаются через строки матрицы A. Но так как матрица A может быть получена из A' обратным элементарным преобразованием, то и, наоборот, ее строки линейно выражаются через строки матрицы A'. Таким образом, системы строк матриц A и A' эквивалентны и, следовательно, ранги этих матриц равны.

Этим можно воспользоваться для вычисления ранга матрицы.

Предложение 3. Ранг матрицы равен числу ненулевых строк любой ступенчатой матрицы, к которой она приводится элементарными преобразованиями строк.

Доказательство. Так как ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях, то нам достаточно доказать, что ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк. Для этого, в свою очередь, достаточно доказать, что ненулевые строки ступенчатой матрицы линейно независимы.

Предположим, что линейная комбинация ненулевых строк ступенчатой матрицы (14) с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ равна нулю. Рассматривая j_1-ю координату этой линейной комбинации, находим, что $\lambda_1 a_{1j_1} = 0$, откуда $\lambda_1 = 0$. Рассматривая, далее, j_2-ю координату с учетом того, что $\lambda_1 = 0$, находим, что $\lambda_2 a_{2j_2} = 0$, откуда $\lambda_2 = 0$. Продолжая так дальше, получаем, что все коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ равны нулю, что и требовалось доказать.

В частности, какую бы последовательность элементарных преобразований, приводящих заданную матрицу к ступенчатому виду, мы ни выбрали, число ненулевых строк полученной ступенчатой матрицы будет одним и тем же.

Задача 10. Доказать теорему Кронекера – Капелли: система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг ее расширенной матрицы равен рангу матрицы коэффициентов.

2.3. Линейные отображения

В любой алгебраической теории наряду с изоморфизмами рассматривают более общие отображения, называемые в общем случае гомоморфизмами, а в случае векторных пространств — линейными отображениями. В то время как изоморфизмы полностью сохраняют внутренние свойства алгебраических структур и их элементов, гомоморфизмы сохраняют их лишь частично.

Определение 1. Пусть V и U — векторные пространства над полем K. Отображение

$$f\colon V \to U$$

называется линейным, если

1) $f(a+b) = f(a) + f(b) \quad \forall a, b \in V$;

2) $f(\lambda a) = \lambda f(a) \quad \forall \lambda \in K,\ a \in V$.

Это определение отличается от определения изоморфизма векторных пространств тем, что в нем не требуется биективности.

Отметим, что при линейном отображении нулевой вектор переходит в нулевой, а противоположный — в противоположный. В самом деле,

$$f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 f(0) = 0,$$
$$f(-a) = f((-1)a) = (-1) f(a) = -f(a).$$

Легко также доказать, что

$$f(a-b) = f(a) - f(b).$$

Пример 1. Поворот есть линейное отображение (и даже изоморфизм) пространства E^2 в себя (рис. 6).

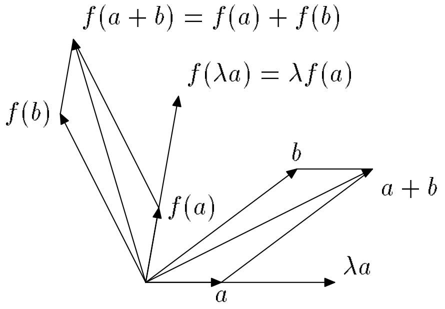

Рис. 6.

Пример 2. Ортогональное проектирование на плоскость определяет линейное отображение (но не изоморфизм) пространства E^3 в пространство геометрических векторов этой плоскости.

Пример 3. Дифференцирование является линейным отображением пространства непрерывно дифференцируемых функций на заданном промежутке числовой прямой в пространство непрерывных функций на этой прямой.

Пример 4. Отображение

$$\varphi \mapsto \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

является линейным отображением пространства непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ в поле $\mathbb{R}$, рассматриваемое как векторное пространство над самим собой.

Линейное отображение $f\colon V \to U$ однозначно определяется образами базисных векторов пространства V. В самом деле, пусть $\{e_i : i \in I\}$ — базис пространства V; тогда для любого вектора $x = \sum\limits_i x_i e_i$ имеем

$$f(x) = \sum_i x_i f(e_i).$$

С другой стороны, если $u_i \in U$ $(i \in I)$ — произвольные векторы, то отображение $f\colon V \to U$, определяемое по формуле

$$f(x) = \sum_i x_i u_i,$$

как легко видеть, является линейным и $f(e_i) = u_i$.

Эти соображения позволяют получить аналитическое описание линейных отображений. Сделаем это для пространств строк. Пусть

$$f\colon K^n \to K^m$$

— линейное отображение. Применим его к единичным строкам $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства K^n (см. пример 1.7.7). Мы получим какие-то строки

$$f(e_j) = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}) \in K^m \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Числа a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ образуют матрицу A размера $m \times n$, которая называется матрицей линейного отображения f. (Обратите внимание, что координаты строки $f(e_j)$ записываются в j-м столбце матрицы A.)

Для любой строки

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_j x_j e_j \in K^n$$

имеем:

$$f(x) = \sum_j x_j f(e_j) = \left(\sum_j a_{1j}x_j, \sum_j a_{2j}x_j, \ldots, \sum_j a_{mj}x_j\right).$$

Таким образом, если положить

$$f(x) = y = (y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

то $y_1, y_2, \ldots, y_m$ выражается через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по формулам

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{22}$$

Обратно, если $A = (a_{ij})$ — произвольная матрица размера $m \times n$, то отображение $f\colon K^n \to K^m$, определяемое формулой (22), линейно и его матрица есть A. Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между линейными отображениями K^n в K^m и матрицами размера $m \times n$.

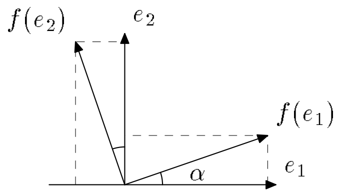

Рис. 7.

Соответственно этому матрица линейного отображения $f\colon V \to U$ произвольных конечномерных векторных пространств определяется следующим образом: в ее j-м столбце стоят координаты образа j-го базисного вектора пространства V. Эта матрица, естественно, зависит от выбора базисов в пространствах V и U.

Пример 5. В пространстве E^2 выберем ортонормированный базис $\{e_1, e_2\}$. Пусть f — поворот на угол α. Тогда (рис. 7)

$$f(e_1) = e_1 \cos\alpha + e_2 \sin\alpha,$$
$$f(e_2) = -e_1 \sin\alpha + e_2 \cos\alpha.$$

Это означает, что матрица f есть

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Заметим, что в данном случае $V = U$ и мы использовали один и тот же базис $\{e_1, e_2\}$ в двух качествах: как базис V и как базис U, хотя согласно определению не обязаны были этого делать.

Пример 6. Найдем матрицу проектирования из примера 2. В плоскости проектирования выберем любой базис $\{e_1, e_2\}$ и дополним его ортогональным вектором e_3 до базиса пространства. Так как при проектировании векторы e_1 и e_2 переходят сами в себя, а вектор e_3 — в нуль, то искомая матрица (относительно выбранных базисов) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В отличие от изоморфизма линейное отображение не обязано быть ни сюръективным, ни инъективным. Нарушение этих свойств приводит к возможности связать с каждым линейным отображением два подпространства — его образ и ядро.

Определение 2. Образом линейного отображения $f\colon V \to U$ называется подмножество

$$\operatorname{Im} f = \{f(a) : a \in V\} \subset U,$$

а ядром — подмножество

$$\operatorname{Ker} f = \{\, a \in V : f(a) = 0 \,\} \subset V.$$

Легко видеть, что $\operatorname{Im} f$ — подпространство в U, а $\operatorname{Ker} f$ — подпространство в V. Докажем, например, второе. Если $a, b \in \operatorname{Ker} f$, т. е. $f(a) = f(b) = 0$, то

$$f(a+b) = f(a) + f(b) = 0 + 0 = 0,$$

т. е. $a + b \in \operatorname{Ker} f$. Далее, если $a \in \operatorname{Ker} f$, т. е. $f(a) = 0$, то для любого $\lambda \in K$

$$f(\lambda a) = \lambda f(a) = \lambda 0 = 0,$$

т. е. $\lambda a \in \operatorname{Ker} f$. Наконец, $0 \in \operatorname{Ker} f$, так как по доказанному выше $f(0) = 0$.

Пример 7. Ядром отображения проектирования из примера 2 является совокупность векторов, ортогональных плоскости проектирования.

Пример 8. Ядром отображения дифференцирования из примера 3 является совокупность постоянных функций, а образом — пространство всех непрерывных функций. Последнее следует из существования первообразной у каждой непрерывной функции, доказываемого в анализе.

Теорема 1. Линейное отображение $f\colon V \to U$ инъективно тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} f = 0$. Более точно, для любого $b \in \operatorname{Im} f$ множество решений уравнения

$$f(x) = b \tag{24}$$

имеет вид $a + \operatorname{Ker} f$, где a — какое-то одно решение этого уравнения.

(Здесь $a + \operatorname{Ker} f$ понимается как совокупность сумм вида $a + y$, где $y \in \operatorname{Ker} f$.)

Заметим, что $\operatorname{Ker} f$ согласно определению есть множество решений уравнения

$$f(x) = 0. \tag{25}$$

Доказательство. Инъективность отображения f означает, что для любого $b \in \operatorname{Im} f$ уравнение (24) имеет единственное решение. Поэтому нам достаточно доказать второе утверждение теоремы.

Пусть $f(a) = b$. Если $y \in \operatorname{Ker} f$, то

$$f(a + y) = f(a) + f(y) = b + 0 = b.$$

Обратно, если $f(x) = b$, то

$$f(x - a) = f(x) - f(a) = b - b = 0,$$

т. е. $y = x - a \in \operatorname{Ker} f$; следовательно,

$$x = a + y \in a + \operatorname{Ker} f.$$

Если $f\colon K^n \to K^m$ — линейное отображение с матрицей A и $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, то уравнение (24) в координатной форме — это не что иное, как система линейных уравнений (13), а уравнение (25) — это система однородных линейных уравнений с теми же коэффициентами при неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Таким образом, множество решений системы уравнений (26) есть подпространство пространства K^n, а множество решений системы (13), если оно не пусто, есть сумма какого-нибудь одного решения и этого подпространства.

Какова размерность пространства решений системы (26)? Ответ на этот вопрос дает

Теорема 2. Пусть $f\colon K^n \to K^m$ — линейной отображение с матрицей A. Тогда

$$\dim \operatorname{Ker} f = n - \operatorname{rk} A.$$

Доказательство. С помощью элементарных преобразований приведем систему (26) к ступенчатому виду. В силу предложения 2 число ненулевых уравнений в этом ступенчатом виде будет равно $r = \operatorname{rk} A$. Поэтому общее решение будет содержать r главных неизвестных и с точностью до перенумерации неизвестных будет иметь вид (ср. (15)):

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x_{r+1} + c_{12}x_{r+2} + \ldots + c_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = c_{21}x_{r+1} + c_{22}x_{r+2} + \ldots + c_{2,n-r}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = c_{r1}x_{r+1} + c_{r2}x_{r+2} + \ldots + c_{r,n-r}x_n. \end{cases} \tag{27}$$

Придавая по очереди одному из свободных неизвестных $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ значение 1, а остальным — значения 0, мы получим следующие решения системы (26):

$$\begin{aligned} &u_1 = (c_{11}, c_{21}, \ldots, c_{r1}, 1, 0, \ldots, 0), \\ &u_2 = (c_{12}, c_{22}, \ldots, c_{r2}, 0, 1, \ldots, 0), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &u_{n-r} = (c_{1,n-r}, c_{2,n-r}, \ldots, c_{r,n-r}, 0, 0, \ldots, 1). \end{aligned}$$

Докажем, что они составляют базис пространства $\operatorname{Ker} f$, откуда и будет следовать утверждение теоремы.

Для любых $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r} \in K$ линейная комбинация

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_{n-r} u_{n-r}$$

является решением системы (26), в котором свободные неизвестные имеют значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}$. Так как значения главных неизвестных однозначно определяются значениями свободных неизвестных (по формулам (27)), то любое решение системы (26) является линейной комбинацией $u_1, u_2, \ldots, u_{n-r}$. С другой стороны, если $u = 0$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-r} = 0$; следовательно, $u_1, u_2, \ldots, u_{n-r}$ линейно независимы.

Всякий базис пространства решений системы однородных линейных уравнений называется фундаментальной системой решений. Предыдущее доказательство дает практический способ построения такой системы решений.

Пусть $f\colon V \to U$ — линейное отображение конечномерных векторных пространств и $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис пространства V. Для любого

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n \in V$$

имеем

$$f(a) = a_1 f(e_1) + a_2 f(e_2) + \ldots + a_n f(e_n).$$

Следовательно,

$$\operatorname{Im} f = \langle f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\rangle. \tag{28}$$

Теорема 3. $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim V$.

Доказательство. Выберем базис пространства V специальным образом: сначала выберем базис $\{e_1, \ldots, e_k\}$ подпространства $\operatorname{Ker} f$, а затем дополним его какими-то векторами $e_{k+1}, \ldots, e_n$ до базиса V. Так как по построению $f(e_1) = \ldots = f(e_k) = 0$, то из (28) следует, что

$$\operatorname{Im} f = \langle f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n)\rangle.$$

Докажем, что векторы $f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n)$ линейно независимы, откуда и будет следовать утверждение теоремы.

Пусть

$$\lambda_1 f(e_{k+1}) + \ldots + \lambda_{n-k} f(e_n) = 0.$$

Рассмотрим вектор

$$a = \lambda_1 e_{k+1} + \ldots + \lambda_{n-k} e_n.$$

Предыдущее равенство означает, что $f(a) = 0$, т. е.

$$a \in \operatorname{Ker} f = \langle e_1, \ldots, e_k\rangle.$$

Так как $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ линейно независимы, то это возможно только при $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-k} = 0$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Если $f\colon K^n \to K^m$ — линейное отображение с матрицей A, то

$$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rk} A.$$

Доказательство получается сравнением теорем 2 и 3.

Следствие 2. Ранг системы столбцов любой матрицы равен рангу системы ее строк.

Доказательство. Пусть $f\colon K^n \to K^m$ — линейное отображение с матрицей A и $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — единичные строки пространства K^n. Из (28) следует, что размерность пространства $\operatorname{Im} f$ равна рангу системы столбцов матрицы A. Сравнение этого с предыдущим следствием и дает желаемый результат.

Пример 9. Поле K можно рассматривать как (одномерное) векторное пространство над самим собой. Линейное отображение $f\colon V \to K$ называется линейной функцией на V. Если f — ненулевая линейная функция, то $\operatorname{Im} f = K$ и, если $\dim V = n$, теорема 3 дает, что

$$\dim \operatorname{Ker} f = n - 1.$$

Пример 10. Пусть X — множество ребер тетраэдра и Y — множество его граней. Каждой функции φ на X со значениями в поле K сопоставим функцию ψ на Y, определяемую следующим образом:

$$\psi(y) = \sum_{x \subset y} \varphi(x),$$

т. е. значение функции ψ на какой-либо грани равно сумме значений функции φ на сторонах этой грани. Этим определяется линейное отображение

$$f\colon F(X, K) \to F(Y, K)$$

(см. пример 1.7.2). Докажем, что если $\operatorname{char} K \neq 2$, то оно сюръективно. Для этого достаточно показать, что $\operatorname{Im} f$ содержит δ-функции всех граней. Функция φ, для которой $f(\varphi)$ есть δ-функция нижней грани, изображена на рис. 8а (значения φ на неотмеченных ребрах равны нулю). Так как

$$\dim F(X, K) = 6, \quad \dim F(Y, K) = 4,$$

то по теореме 3

$$\dim \operatorname{Ker} f = 6 - 4 = 2.$$

Функции, составляющие базис $\operatorname{Ker} f$, изображены на рис. 8б.

Задача 1. Для отображения f из предыдущего примера найти $\dim \operatorname{Ker} f$ в случае, когда $\operatorname{char} K = 2$.

Так как столбцы матрицы A — это строки транспонированной матрицы A^T (см. §1.9), то следствие 2 §2.3 означает, что

$$\operatorname{rk} A^T = \operatorname{rk} A.$$

Аналогично элементарным преобразованием строк матрицы определяются элементарные преобразования столбцов. Им соответствуют элементарные преобразования строк транспонированной матрицы. Поэтому ранг матрицы не изменяется не

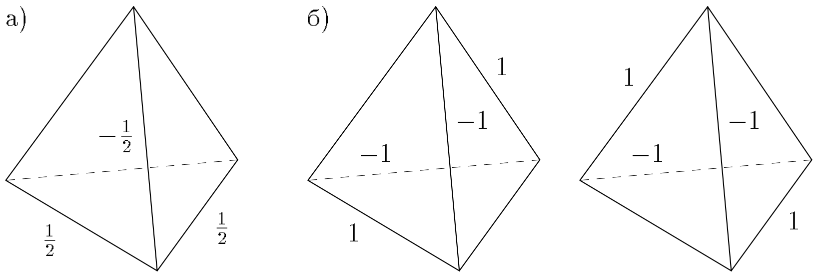

Рис. 8.

только при элементарных преобразованиях строк, но и при элементарных преобразованиях столбцов.

Замечание. Элементарные преобразования столбцов матрицы равносильны ее умножению на элементарные матрицы справа.

Обратимся теперь к операциям над линейными отображениями.

Линейные отображения $V \to U$ можно складывать и умножать на числа, как обычные функции:

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a),$$
$$(\lambda f)(a) = \lambda f(a).$$

Относительно этих операций они образуют векторное пространство.

Далее, если

$$f : V \to U, \quad g : W \to V$$

— линейные отображения, то их произведение (композиция)

$$fg : W \to U$$

есть также линейное отображение. В самом деле,

$$(fg)(a+b) = f(g(a+b)) = f(g(a)+g(b)) = \\ = f(g(a)) + f(g(b)) = (fg)(a) + (fg)(b),$$
$$(fg)(\lambda a) = f(g(\lambda a)) = f(\lambda g(a)) = \lambda f(g(a)) = \lambda (fg)(a).$$

Умножение линейных отображений связано с линейными операциями свойствами

$$(g+h) = fg + fh, \quad (f+g)h = fh + gh,$$
$$(\lambda f)g = f(\lambda g) = \lambda(fg) \quad \forall \lambda \in K.$$

Докажем, например, первое из свойств дистрибутивности. Пусть

$$f\colon V \to U, \quad g\colon W \to V, \quad h\colon W \to V$$

— линейные отображения. Для любого $a \in W$ имеем:

$$\begin{aligned}(f(g+h))(a) &= f((g+h)(a)) = f(g(a)+h(a)) = \\ &= f(g(a)) + f(h(a)) = (fg)(a) + (fh)(a) = (fg+fh)(a).\end{aligned}$$

Умножение линейных отображений ассоциативно, как и вообще умножение любых отображений. В самом деле, пусть M, N, P, Q — какие-то множества и

$$f\colon M \to N, \quad g\colon P \to N, \quad h\colon Q \to P$$

— какие-то отображения. Тогда для любого $a \in Q$ имеем:

$$((fg)h)(a) = (fg)(h(a)) = f(g(h(a))),$$
$$(f(gh))(a) = f((gh)(a)) = f(g(h(a))),$$

откуда

$$(fg)h = f(gh).$$

Операции над линейными отображениями пространств строк соответствуют таким же операциям над их матрицами. Для линейных операций это очевидно. Докажем это для умножения. Пусть

$$f\colon K^n \to K^m, \quad g\colon K^p \to K^n$$

— линейные отображения с матрицами $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{jk})$ соответственно. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_p$ — единичные строки пространства K^p. Имеем тогда:

$$g(e_k) = (b_{1k}, b_{2k}, \ldots, b_{nk}),$$
$$(fg)(e_k) = f(g(e_k)) = \left(\sum_j a_{1j}b_{jk}, \sum_j a_{2j}b_{jk}, \ldots, \sum_j a_{mj}b_{jk}\right).$$

Следовательно, матрица отображения fg есть $C = (c_{ik})$, где

$$c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk}.$$

Это означает, что $C = AB$, что и требовалось доказать.

Пример 11. Матричное равенство, доказанное в примере 1.9.2, на языке линейных отображений означает, что произведение поворотов плоскости на углы α и β есть поворот на угол $\alpha + \beta$ (см. пример 3). Поскольку последнее утверждение геометрически очевидно, это дает доказательство формул для косинуса и синуса суммы двух углов.

Свойства операций над матрицами, полученные нами в §1.9 прямыми вычислениями, могут быть теперь выведены из соответствующих свойств операций над линейными отображениями.

Очевидно, что тождественное отображение

$$\mathrm{id}\colon V \to V$$

линейно. Матрица тождественного отображения $\mathrm{id}\colon K^n \to K^n$ есть единичная матрица E порядка n. Поэтому свойства (10) единичной матрицы есть просто перевод на матричный язык очевидных равенств

$$f \cdot \mathrm{id} = f, \quad \mathrm{id} \cdot f = f,$$

где $f\colon K^n \to K^m$ — линейное отображение, задаваемое матрицей A, а id в первом случае обозначает тождественное отображение пространства K^n, а во втором — тождественное отображение пространства K^m.

Если $f\colon V \to U$ — биективное линейное отображение, то обратное отображение $f^{-1}\colon U \to V$ также линейно. В самом деле, для любых $a, b \in U$ пусть $c, d \in V$ — такие векторы, что $f(c) = a,\ f(d) = b$; тогда $f(c + d) = a + b$ и, следовательно,

$$f^{-1}(a + b) = c + d = f^{-1}(a) + f^{-1}(b).$$

Аналогично проверяется и второе свойство линейности.

Применим эти соображения к проблеме обратимости матриц.

Определение 3. Квадратная матрица A порядка n называется невырожденной, если $\operatorname{rk} A = n$.

Иными словами, матрица A невырожденна, если ее строки (или столбцы) линейно независимы.

Теорема 4. Квадратная матрица обратима тогда и только тогда, когда она невырожденна.

(Определение обратимого элемента кольца с единицей см. в §1.3.)

Доказательство. Пусть $f\colon K^n \to K^n$ — линейное отображение, задаваемое матрицей A. Согласно предыдущему матрица A обратима тогда и только тогда, когда отображение f биективно. Последнее в силу теоремы 1 имеет место тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Im} f = K^n, \quad \operatorname{Ker} f = 0.$$

Ввиду теоремы 2 и следствия 1 теоремы 3 каждое из этих условий эквивалентно тому, что $\operatorname{rk} A = n$.

Нахождение матрицы, обратной к A, можно рассматривать как решение матричного уравнения

$$AX = E$$

(где X — неизвестная квадратная матрица). Такое уравнение можно решать, как и уравнение (16), с помощью умножения слева на элементарные матрицы, что равносильно элементарным преобразованиям строк «расширенной» матрицы $(A \mid E)$. Приведя левую половину этой матрицы к единичной матрице (что возможно в силу невырожденности матрицы A), в правой половине мы получим обратную матрицу.

Пример 12. Найдем матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Для этого проделаем следующие элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right).$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Используя линейные отображения, доказать, что ранг произведения двух матриц (не обязательно квадратных) не превосходит ранга каждой из них, а если одна из этих матриц невырожденна, то ранг произведения равен рангу другой матрицы.

2.4. Определители

Вопрос о невырожденности квадратной матрицы или, что равносильно, о линейной независимости n векторов n-мерного пространства в каждом конкретном случае можно решить приведением матрицы к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк. Однако представляет интерес нахождение общего условия, которому должны удовлетворять элементы матрицы для того, чтобы она была невырожденна.

Поясним идею получения такого условия на примере геометрических векторов.

Пара неколлинеарных векторов $a_1, a_2 \in E^2$ называется ориентированной положительно, если поворот от a_1 к a_2 (на угол, меньший π) происходит в положительном направлении. Для любых векторов a_1, a_2 обозначим через $\operatorname{area}(a_1, a_2)$ ориентированную площадь параллелограмма, натянутого на эти векторы, т. е. площадь, взятую со знаком плюс, если пара $\{a_1, a_2\}$ ориентирована положительно, и со знаком минус в противном случае; если векторы a_1 и a_2 коллинеарны, то положим $\operatorname{area}(a_1, a_2) = 0$. Величина $|\operatorname{area}(a_1, a_2)|$ может служить мерой линейной независимости векторов a_1 и a_2.

Функция $\operatorname{area}(a_1, a_2)$ векторных аргументов a_1 и a_2 обладает следующими свойствами:

1) она линейна по a_1 и по a_2 (см. пример 2.3.9);

2) $\operatorname{area}(a_2, a_1) = -\operatorname{area}(a_1, a_2)$;

3) если $\{e_1, e_2\}$ — положительно ориентированный ортонормированный базис, то $\operatorname{area}(e_1, e_2) = 1$.

Последние два свойства очевидны. Для доказательства первого представим площадь параллелограмма как произведение основания на высоту. Мы получим тогда:

$$\operatorname{area}(a_1, a_2) = |a_1| h_2,$$

где $|a_1|$ — длина вектора a_1, а h_2 — проекция вектора a_2 на прямую, ортогональную a_1 (рис. 9). Так как проектирование

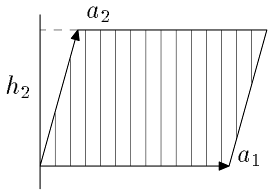

Рис. 9.

есть линейное отображение, то отсюда следует линейность $\operatorname{area}(a_1, a_2)$ по a_2. Аналогично, взяв за основание a_2, можно доказать линейность по a_1.

Свойств 1)–3) достаточно для вычисления $\operatorname{area}(a_1, a_2)$. Выразим векторы a_1, a_2 через положительно ориентированный ортонормированный базис $\{e_1, e_2\}$:

$$a_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2,$$
$$a_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2.$$

Имеем тогда:

$$\begin{aligned}\operatorname{area}(a_1, a_2) &= \operatorname{area}(a_{11}e_1 + a_{12}e_2, a_{21}e_1 + a_{22}e_2) = \\ &= a_{11}a_{21}\operatorname{area}(e_1, e_1) + a_{11}a_{22}\operatorname{area}(e_1, e_2) + \\ &\quad + a_{12}a_{21}\operatorname{area}(e_2, e_1) + a_{12}a_{22}\operatorname{area}(e_2, e_2) = \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.\end{aligned}$$

Выражение $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ называется определителем матрицы $A = (a_{ij})$ порядка 2. Из предыдущего следует, что векторы a_1 и a_2 линейно независимы тогда и только тогда, когда определитель матрицы, составленной из их координат, отличен от нуля.

Аналогичным образом можно доказать, что ориентированный объем $\operatorname{vol}(a_1, a_2, a_3)$ параллелепипеда, натянутого на векторы a_1, a_2, a_3, обладает следующими свойствами:

1) он линеен по каждому из трех аргументов a_1, a_2, a_3;

2) он меняет знак при перестановке любых двух аргументов;

3) если $\{e_1, e_2, e_3\}$ — положительно ориентированный ортонормированный базис, то $\operatorname{vol}(e_1, e_2, e_3) = 1$.

(Тройка $\{a_1, a_2, a_3\}$ считается ориентированной положительно, если поворот от a_1 к a_2 со стороны a_3 происходит

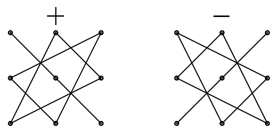

Рис. 10.

в положительном направлении.)

Пользуясь этими свойствами, можно получить следующее выражение $\mathrm{vol}(a_1, a_2, a_3)$ через координаты векторов a_1, a_2, a_3 в положительно ориентированном ортонормированном базисе (проделайте это!):

$$\mathrm{vol}(a_1, a_2, a_3) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства, называется определителем матрицы $A = (a_{ij})$ порядка 3. Таким образом, векторы a_1, a_2, a_3 линейно независимы тогда и только тогда, когда определитель матрицы, составленной из их координат, отличен от нуля.

Определитель матрицы $A = (a_{ij})$ порядка 3 представляет собой алгебраическую сумму всевозможных произведений трех элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца. На рис. 10 схематически изображено, какие из этих произведений берутся со знаком плюс и какие со знаком минус.

Определитель матрицы A обозначается либо через $\det A$, либо путем замены круглых скобок, заключающих в себе матрицу, вертикальными чертами.

Пример 1. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$

Пример 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 + 3\cdot4\cdot8 - 3\cdot5\cdot7 - 2\cdot4\cdot9 - 1\cdot6\cdot8 = \\ = 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0.$$

В случае произвольной размерности и произвольного поля, когда мы не располагаем такими понятиями, как площадь или объем, естественно попытаться ввести определитель как функцию, обладающую свойствами, аналогичными свойствам 1)–3). Дадим необходимые для этого определения.

Пусть V — векторное пространство над полем K и $f(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ — функция со значениями в K от m векторов пространства V.

Определение 1. Функция $f(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ называется полилинейной (или, точнее m-линейной), если она линейна по каждому аргументу.

Например, линейность по первому аргументу означает, что

$$f(a_1' + a_1'', a_2, \ldots, a_m) = f(a_1', a_2, \ldots, a_m) + f(a_1'', a_2, \ldots, a_m),$$
$$f(\lambda a_1, a_2, \ldots, a_m) = \lambda f(a_1, a_2, \ldots, a_m).$$

Определение 2. Полилинейная функция $f(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ называется кососимметрической, если при перестановке любых двух аргументов она умножается на -1.

Важное свойство кососимметрической полилинейной функции состоит в том, что, если только $\operatorname{char} K \neq 2$, она обращается в нуль всякий раз, когда какие-либо два аргумента принимают одинаковые значения. В самом деле, при перестановке этих двух аргументов значение функции не изменится, но, с другой стороны, оно должно умножиться на -1; следовательно, оно равно нулю.

Замечание 1. Если $\operatorname{char} K = 2$, то последнее свойство следует принять за определение кососимметричности. Докажем, что из него, наоборот, вытекает кососимметричность в определенном выше смысле. Поскольку при проверке кососимметричности по каким-либо двум аргументам значения остальных аргументов следует считать фиксированными (хотя и любыми), достаточно рассмотреть случай билинейной (т.е. 2-линейной) функции. Пусть f — билинейная функция, обращающаяся в нуль при одинаковых значениях аргументов. Тогда для любых $a, b \in V$ имеем:

$$0 = f(a+b, a+b) = f(a,a) + f(a,b) + f(b,a) + f(b,b) = \\ = f(a,b) + f(b,a),$$

откуда

$$f(b,a) = -f(b,a).$$

Теперь введем понятия, необходимые для описания явного аналитического выражения определителя матрицы порядка n, подобного тем, какие были получены при $n = 2$ и 3.

Последовательность $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ чисел $1, 2, \dots, n$, расположенных в каком-либо порядке, называется перестановкой из n элементов. Так как k_1 может принимать n различных значений, k_2 при заданном k_1 может принимать $n-1$ значение, k_3 при заданных k_1 и k_2 может принимать $n-2$ значения и т. д., то имеется всего

$$n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n!$$

перестановок из n элементов. Перестановка $(1, 2, \dots, n)$ называется тривиальной.

Замечание 2. Слово «перестановка» в математической литературе (в частности, в этой книге) иногда употребляется в общечеловеческом смысле как изменение порядка каких-либо объектов (например, перестановка слов в предложении).

Говорят, что пара чисел образует инверсию в заданной перестановке, если большее из них стоит левее меньшего. Перестановка называется четной (соотв. нечетной), если число инверсий в ней четно (соотв. нечетно). Наряду с этим определяется знак перестановки, равный 1, если перестановка четна, и -1, если она нечетна. Знак перестановки $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ обозначается через $\operatorname{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n)$.

Пример 3. При $n = 3$ четные перестановки — это $(1, 2, 3)$ (нет инверсий), $(2, 3, 1)$ (две инверсии) и $(3, 1, 2)$ (две инверсии); нечетные — $(1, 3, 2)$ (одна инверсия), $(3, 2, 1)$ (три инверсии) и $(2, 1, 3)$ (одна инверсия).

Пример 4. Тривиальная перестановка не имеет инверсий и поэтому четна. Напротив, в перестановке $(n, n-1, \dots, 2, 1)$ любая пара чисел образует инверсию. Поэтому число инверсий в этой перестановке равно

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} \equiv \left[\frac{n}{2}\right] \pmod 2.$$

Следовательно,

$$\operatorname{sgn}(n, n-1, \dots, 2, 1) = (-1)^{n(n-1)/2} = (-1)^{[n/2]}.$$

Перемена местами двух элементов в перестановке называется транспозицией этих элементов.

Предложение 1. При любой транспозиции четность перестановки меняется.

Доказательство. При транспозиции соседних элементов меняется взаимное расположение только этих элементов, так что число инверсий изменяется (увеличивается или уменьшается) на 1; следовательно, четность меняется. Транспозиция элементов i и j, разделенных s другими элементами, может быть осуществлена путем $2s+1$ последовательных транспозиций соседних элементов: сначала переставляем i со всеми промежуточными элементами и с j, затем переставляем j со всеми промежуточными элементами. Каждый раз знак перестановки будет меняться по доказанному выше. Так как это произойдет нечетное число раз, то в результате знак перестановки изменится на противоположный.

Следствие. При $n > 1$ число четных перестановок из n элементов равно числу нечетных.

Доказательство. Выпишем все четные перестановки и в каждой из них произведем транспозицию первых двух элементов. Тогда мы получим, причем по одному разу, все нечетные перестановки.

Теперь мы в состоянии сформулировать и доказать основную теорему.

Теорема 1. В пространстве K^n существует единственная кососимметрическая n-линейная функция $\det$, удовлетворяющая условию

$$\det(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1 \tag{29}$$

(где $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — единичные строки). Она имеет вид

$$\det(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \ldots, k_n)\, a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n}, \tag{30}$$

где a_{ik} обозначает k-ю компоненту строки a_i, а суммирование происходит по всем перестановкам из n элементов.

Доказательство. 1) Предположим, что функция det удовлетворяет условиям теоремы. Тогда

$$\det(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \det\Big(\sum_{k_1} a_{1k_1} e_{k_1}, \sum_{k_2} a_{2k_2} e_{k_2}, \ldots, \sum_{k_n} a_{nk_n} e_{k_n}\Big) = \\ = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n} a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n} \det(e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_n}).$$

В силу кососимметричности функции det, если какие-то два из чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$ равны, то $\det(e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_n}) = 0$. Если все они различны,то

$$\det(e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_n}) = \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \ldots, k_n).$$

В самом деле, если это равенство верно для какой-то перестановки $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$, то оно верно и для любой перестановки, получаемой из нее транспозицией, так как при транспозиции обе части равенства умножаются на -1. По условию теоремы оно верно для тривиальной перестановки. Но очевидно, что любую перестановку можно получить из тривиальной последовательными транспозициями. Следовательно, доказываемое равенство верно для любой перестановки, и мы получаем для $\det(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ выражение (30). Таким образом, если функция det, удовлетворяющая условиям теоремы, существует, то она имеет вид (30).

2) Докажем теперь, что функция det, определяемая равенством (30), удовлетворяет условиям теоремы. Линейность по каждому из аргументов очевидна, поскольку для любого i равенство (30) можно представить в виде

$$\det(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_j a_{ij} u_j,$$

где $u_1, \ldots, u_n$ не зависят от a_i. Условие (29) также выполнено, поскольку в выражении для $\det(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ слагаемое, отвечающее тривиальной перестановке, равно 1, а все остальные слагаемые равны нулю. Остается проверить кососимметричность.

Посмотрим, что происходит при перестановке аргументов a_i и a_j. Мы можем разбить множество всех перестановок на пары перестановок, получаемых друг из друга транспозицией k_i и k_j. Согласно предложению 1 произведения $a_{1k_1}a_{2k_2}\dots a_{nk_n}$, соответствующие перестановкам одной такой пары, входят в выражение (30) с противоположными знаками. При перестановке a_i и a_j они меняются местами и, следовательно, все выражение умножается на -1.

Замечание 3. Если $\operatorname{char} K = 2$, то кососимметричность следует понимать в смысле замечания 1. Ее доказательство в этом случае состоит в том, что при $a_i = a_j$ члены выражения (30), соответствующие перестановкам каждой из описанных выше пар, взаимно уничтожаются.

Определение 3. Определителем квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n называется число

$$\det A = \det(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

где $a_1, a_1, \dots, a_n$ — строки матрицы A.

Таким образом,

$$\det A = \sum_{(k_1,k_2,\dots,k_n)} \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n)\, a_{1k_1}a_{2k_2}\dots a_{nk_n}. \qquad (31)$$

При $n = 2$ и 3 мы получаем выражения, приведенные в начале этого параграфа.

При $n \geqslant 4$ вычисление определителя непосредственно по формуле (31) в общем случае весьма затруднительно. Существуют значительно более простые способы вычисления определителей. Они основаны на свойствах определителей, доказываемых ниже.

Предложение 2. Определитель матрицы не изменяется при элементарном преобразовании строк 1-го типа.

Доказательство. Пусть, скажем, к 1-й строке матрицы A прибавляется 2-я строка, умноженная на c. Полученную матрицу обозначим через A'. Имеем:

$$\det A' = \det(a_1 + ca_2, a_2, \dots, a_n) = \\ = \det(a_1, a_2, \dots, a_n) + c\det(a_2, a_2, \dots, a_n) = \det A.$$

При перестановке двух строк определитель, как мы знаем, умножается на -1, а при умножении какой-либо строки на число он умножается на это число. Таким образом мы можем проследить за изменением определителя при любых элементарных преобразованиях строк матрицы. Так как любую матрицу с помощью элементарных преобразований строк можно привести к ступенчатому виду, а всякая ступенчатая квадратная матрица является треугольной (но, может быть, не строго треугольной), то нам остается научиться вычислять определитель треугольной матрицы.

Предложение 3. Определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.

Доказательство. Произведение диагональных элементов входит в выражение (31) определителя любой матрицы со знаком плюс, так как соответствует тривиальной перестановке. В случае треугольной матрицы все остальные члены этого выражения равны нулю. В самом деле, если $a_{1k_1}a_{2k_2}\ldots a_{nk_n} \neq 0$, то

$$k_1 \geqslant 1,\ k_2 \geqslant 2,\ \ldots,\ k_n \geqslant n;$$

но так как

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 1 + 2 + \ldots + n,$$

то это возможно только при

$$k_1 = 1,\ k_2 = 2,\ \ldots,\ k_n = n.$$

Помимо того, что они дают практический способ вычисления определителей, предложения 1 и 2 позволяют нам ответить на вопрос, ради которого мы и ввели понятие определителя.

Теорема 2. Квадратная матрица A невырожденна тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$.

Доказательство. С помощью элементарных преобразований строк приведем матрицу A к ступенчатому виду. Если при этом использовались элементарные преобразования 2-го или 3-го типов, то определитель может измениться, но, во всяком случае, его равенство или неравенство нулю сохранится. Матрица A невырожденна тогда и только тогда, когда полученная ступенчатая матрица является строго треугольной; но это равносильно тому, что ее определитель отличен от нуля.

Продолжим изучение свойств определителей.

Теорема 3. $\det A^T = \det A$.

Доказательство. Определитель матрицы A^T, как и определитель матрицы A, есть алгебраическая сумма всевозможных произведений n элементов матрицы A, взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца. Единственное, за чем надо проследить — это то, что одинаковые произведения входят в $\det A$ и $\det A^T$ с одинаковыми знаками.

Для того чтобы выяснить, с каким знаком входит в $\det A^T$ произведение $a_{1k_1}a_{2k_2}\ldots a_{nk_n}$, нужно расположить его множители по порядку номеров столбцов. Этого можно достичь, последовательно меняя местами два множителя. При каждой такой перемене в перестановках, образуемых номерами строк и столбцов, одновременно происходят транспозиции, так что произведение их знаков не меняется. Таким образом, если полученное в результате произведение будет иметь вид $a_{l_1 1}a_{l_2 2}\ldots a_{l_n n}$, то

$$\operatorname{sgn}(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \operatorname{sgn}(l_1, l_2, \ldots, l_n),$$

а это и означает, что рассматриваемое произведение входит в $\det A$ и $\det A^T$ с одним и тем же знаком.

Из этой теоремы следует, что всякое свойство определителей остается справедливым, если заменить в нем строки столбцами, а столбцы — строками. В частности, мы таким образом получаем

Следствие. Определитель есть кососимметрическая полилинейная функция столбцов матрицы.

Теорема 4 (об определителе матрицы с углом нулей). Пусть матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

где B и C — квадратные матрицы. Тогда

$$\det A = \det B \cdot \det C.$$

Доказательство. Пусть матрица B имеет порядок m, матрица C — порядок n. Если $\det C = 0$, то элементарными преобразованиями строк матрицы C можно получить нулевую строку. Проделав такие же элементарные преобразования последних n строк матрицы A, мы получим нулевую строку во всей матрице A. Следовательно, в этом случае $\det A = 0$ и доказываемое равенство верно. Аналогичное рассуждение, но с элементарными преобразованиями первых m столбцов, показывает, что если $\det B = 0$, то $\det A = 0$ и доказываемое равенство верно.

Пусть теперь $\det B \neq 0$ и $\det C \neq 0$. Рассмотрим отношение

$$\frac{\det A}{\det B \cdot \det C}. \tag{32}$$

Нам нужно доказать, что оно равно 1. При любом элементарном преобразовании последних n строк матрицы A $\det A$ и $\det C$ умножаются на одно и то же число и, следовательно, отношение (32) не изменяется. Такими преобразованиями можно привести матрицу C к треугольному виду. Аналогично, отношение (32) не изменяется при любых элементарных преобразованиях первых m столбцов матрицы A. Такими преобразованиями можно привести матрицу B к треугольному виду (методом Гаусса, отраженным относительно побочной диагонали). Поэтому нам достаточно доказать, что отношение (32) равно 1 в случае, когда B и C — треугольные матрицы; но это очевидно.

Ввиду теоремы 3 аналогичная формула верна и для матриц с правым верхним углом нулей.

Пример 5. Вычислим так называемый определитель Вандермонда

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Вычитая из каждого столбца, начиная с последнего, предыдущий столбец, умноженный на x_1, и применяя теорему 4, получаем:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \ldots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1)\, V(x_2, \ldots, x_n).$$

Продолжая так дальше, в конце концов получаем:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i>j} (x_i - x_j). \tag{33}$$

Пусть A — произвольная (не обязательно квадратная) матрица. Всякая матрица, составленная из элементов матрицы A, находящихся на пересечении каких-то выбранных строк и каких-то выбранных столбцов, называется подматрицей матрицы A. Подчеркнем, что выбираемые строки и столбцы не обязаны идти подряд.

Определитель квадратной подматрицы порядка k называется минором порядка k матрицы A. Иногда, допуская вольность речи, саму квадратную подматрицу также называют минором. В частности, если A — квадратная матрица порядка n, то минор порядка $n-1$, получаемый вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, называется дополнительным минором элемента a_{ij} и обозначается через M_{ij}. Число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij}. Смысл алгебраического дополнения ясен из следующей леммы.

Лемма 1.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & a_{ij} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{ij} A_{ij}.$$

(В левой части стоит определитель матрицы, полученной из матрицы $A = (a_{ij})$ заменой нулями всех элементов i-й строки, кроме a_{ij}.)

Доказательство. Поменяем местами i-ю строку со всеми предыдущими строками и j-й столбец со всеми предыдущими столбцами. При этом мы будем $i-1$ раз менять местами строки и $j-1$ раз — столбцы, так что определитель умножится на

$$(-1)^{i-1+j-1} = (-1)^{i+j}.$$

В результате получится определитель вида

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nj} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

где в правом нижнем углу стоит дополнительный минор элемента a_{ij}. По теореме об определителе матрицы с углом нулей этот определитель равен $a_{ij}M_{ij}$. С учетом предыдущего знака отсюда и получается доказываемое равенство.

Теорема 5. Для любой квадратной матрицы A

$$\det A = \sum_j a_{ij}A_{ij} = \sum_i a_{ij}A_{ij}.$$

Первая из этих формул называется формулой разложения определителя по i-й строке, вторая — формулой разложения определителя по j-му столбцу.

Доказательство. Так как каждый член выражения (31) для $\det A$ содержит ровно один элемент из i-й строки, то предыдущая лемма означает, что сумма тех членов, которые содержат a_{ij}, равна $a_{ij}A_{ij}$. Отсюда вытекает формула разложения по строке. Аналогично доказывается формула разложения по столбцу.

Замечание 4. Знаки $(-1)^{i+j}$ чередуются в матрице в шахматном порядке, причем на главной диагонали стоят плюсы.

Пример 6. Вычисление определителя Δ из примера 2 разложением по 2-й строке дает

$$\Delta = -4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = \\ = -4\cdot(-6) + 5\cdot(-12) - 6\cdot(-6) = 0.$$

Пример 7. Вычислим определитель порядка n вида

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Разлагая его по 1-й строке и затем второй из полученных определителей — по 1-му столбцу, получаем:

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2},$$

откуда

$$\Delta_n - \Delta_{n-1} = \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}.$$

Это означает, что последовательность $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots)$ есть арифметическая прогрессия. Так как $\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = 3$, то ее разность равна 1 и

$$\Delta_n = n + 1.$$

Теорема 6. Для любых квадратных матриц A, B

$$\det AB = \det A \cdot \det B.$$

Доказательство. Для любой матрицы U имеем

$$(UA)B = U(AB).$$

В частности, если U — элементарная матрица, это означает, что, когда мы делаем какое-нибудь элементарное преобразование строк матрицы A, в матрице AB происходит такое же преобразование.

Если $\det A = 0$, то с помощью элементарных преобразований строк мы можем получить в матрице A нулевую строку. Соответствующая строка произведения AB, как легко видеть, также станет нулевой. Следовательно, $\det AB = 0$, так что доказываемое равенство в этом случае верно.

Пусть теперь $\det A \neq 0$. Рассмотрим отношение

$$\frac{\det AB}{\det A}. \tag{34}$$

Нам нужно доказать, что оно равно $\det B$. Из предыдущего следует, что оно не изменяется при любых элементарных преобразованиях строк матрицы A. Так как с помощью таких преобразований матрицу A можно привести к единичной матрице E, то нам достаточно доказать, что отношение (34) равно $\det B$ в случае, когда $A = E$; но это очевидно.

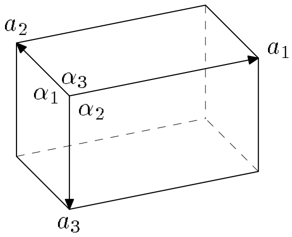

Рис. 11.

Пример 8. Выразим неориентированный объем V параллелепипеда, натянутого на векторы $a_1, a_2, a_3 \in E^3$, через длины $|a_1|, |a_2|, |a_3|$ его ребер и плоские углы (см. рис. 11)

$$\alpha_1 = \widehat{a_2 a_3},\ \ \alpha_2 = \widehat{a_3 a_1},\ \ \alpha_3 = \widehat{a_1 a_2}.$$

Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица, составленная из координат векторов a_i в ортонормированном базисе. Мы знаем (см. начало параграфа), что

$$V = \pm \det A.$$

Следовательно,

$$V^2 = (\det A)^2 = \det A \cdot \det A^T = \det AA^T.$$

Из правила умножения матриц следует, что (i,j)-й элемент матрицы AA^T есть скалярное произведение

$$(a_i, a_j) = |a_i||a_j| \cos \widehat{a_i a_j}.$$

Таким образом,

$$V^2 = \begin{vmatrix} |a_1|^2 & |a_1||a_2|\cos\alpha_3 & |a_1||a_3|\cos\alpha_2 \\ |a_2||a_1|\cos\alpha_3 & |a_2|^2 & |a_2||a_3|\cos\alpha_1 \\ |a_3||a_1|\cos\alpha_2 & |a_3||a_2|\cos\alpha_1 & |a_3|^2 \end{vmatrix} =$$

$$= |a_1|^2|a_2|^2|a_3|^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha_3 & \cos\alpha_2 \\ \cos\alpha_3 & 1 & \cos\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\alpha_1 & 1 \end{vmatrix}$$

и, значит,

$$V = |a_1||a_2||a_3| \times$$
$$\times \sqrt{1 + 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3 - \cos^2\alpha_1 - \cos^2\alpha_2 - \cos^2\alpha_3}.$$

2.5. Некоторые приложения определителей

Как мы видели в предыдущем параграфе (теорема 4.2), определители дают ответ на вопрос о невырожденности (и, тем самым, об обратимости) квадратной матрицы, который служил нам поводом для их введения. Вариации на эту тему приводят к многочисленным приложениям определителей в теории линейных уравнений и теории матриц. Первые из таких приложений будут рассмотрены в этом параграфе.

Рассмотрим квадратную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{35}$$

Обозначим через A ее матрицу коэффициентов и через A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ матрицу, полученную из A заменой ее i-го столбца столбцом свободных членов.

Теорема 1. Если $\det A \neq 0$, то система (35) имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Эти формулы называются формулами Крамера.

Доказательство. При любом элементарном преобразовании системы (35) в матрицах A и A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ одновременно происходит соответствующее элементарное преобразование строк и, следовательно, отношения, стоящие в правых частях формул Крамера, не изменяются. С помощью элементарных преобразований строк матрицу A можно привести к единичной матрице. Поэтому достаточно доказать теорему в том случае, когда $A = E$.

Если $A = E$, то система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\quad = b_1, \\ \quad x_2 \qquad\quad\;\; = b_2, \\ \qquad\quad \ddots \\ \qquad\qquad\; x_n = b_n. \end{cases}$$

Она, очевидно, имеет единственное решение $x_i = b_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). С другой стороны,

$$\det A = \det E = 1,$$

$$\det A_i = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & b_1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & b_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b_i & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{n-1} & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & b_n & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ i \end{array} = b_i,$$

так что формулы Крамера в этом случае действительно верны.

Если $\det A = 0$, то ступенчатый вид матрицы A не будет строго треугольным и, следовательно, система (35) либо несовместна, либо неопределенна. Опасно в этом случае пытаться как-то трактовать формулы Крамера. Они просто не применимы (ведь они доказывались в предположении, что $\det A \neq 0$), и надо действовать как-то иначе.

Задача 1. Доказать, что если $\det A = 0$, но $\det A_i \neq 0$ для какого-либо i, то система (35) несовместна.

Задача 2. Показать, что если

$$\det A = \det A_1 = \ldots = \det A_n = 0,$$

то система (35) может быть как несовместна, так и неопределенна. (Привести примеры на оба случая.)

Отметим, что формулы Крамера — это далеко не лучший способ для практического решения систем линейных уравнений, за исключением, быть может, случая $n = 2$. Они имеют в основном теоретическое значение. В частности, они позволяют получить следующие явные формулы для элементов обратной матрицы.

Теорема 2. Пусть $A = (a_{ij})$ — невырожденная квадратная матрица. Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

(Через A_{ij} обозначается алгебраическое дополнение к элементу a_{ij}: см. §2.4.)

Доказательство. Матрица A^{-1} является решением матричного уравнения

$$AX = E.$$

Это уравнение рассыпается на n уравнений относительно столбцов X_1, X_2, ..., X_n матрицы X:

$$AX_j = E_j, \tag{36}$$

где E_j — j-й столбец матрицы E.

В координатной записи уравнение (36) представляет собой систему n линейных уравнений относительно элементов $x_{1j}, x_{2j} \dots, x_{nj}$ столбца X_j. Матрицей коэффициентов этой системы служит матрица A, а столбцом свободных членов — столбец E_j. По формулам Крамера

$$x_{ij} = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & \dots & 1 & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \underset{i}{0} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{A_{ji}}{\det A},$$

что и требовалось доказать.

Пример. Для невырожденной матрицы порядка 2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

получаем

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Эту простую формулу имеет смысл запомнить.

Задача 3. Пусть A — невырожденная целочисленная (т.е. состоящая из целых чисел) квадратная матрица. Доказать, что матрица A^{-1} является целочисленной тогда и только тогда, когда $\det A = \pm 1$.

Наконец, нахождение ранга любой матрицы также может быть сведено к вычислению определителей.

Теорема 3 (о ранге матрицы). Ранг матрицы равен наибольшему порядку ее миноров, отличных от нуля.

Доказательство. Пусть ранг матрицы A равен r, и пусть $s > r$. Тогда любые s строк матрицы A линейно зависимы и, тем более, линейно зависимы строки любой квадратной подматрицы порядка s, представляющие собой части соответствующих строк матрицы A. Следовательно, любой минор порядка s равен нулю. Далее, рассмотрим подматрицу, образованную какими-либо r линейно независимыми строками матрицы A. Ее ранг, очевидно, также равен r и, значит, среди ее столбцов найдется r линейно независимых. Минор порядка r, образованный этими столбцами, не равен нулю.

Задача 4. Доказать теорему о ранге матрицы в следующей более сильной форме: если в матрице A имеется минор порядка r, отличный от нуля, а все миноры порядка $r+1$, получаемые приписыванием к нему одной строки и одного столбца, (так называемые окаймляющие миноры) равны нулю, то $\operatorname{rk} A = r$.

Задача 5. Доказать, что в матрице ранга r любой минор порядка r, образуемый пересечением r линейно независимых строк с r линейно независимыми столбцами, отличен от нуля.