1. Комплексные числа, многочлены, формальные ряды

1.1. Вычислить в алгебраической форме:
$$\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}, \quad \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}, \quad \frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}.$$

1.2. Найти такие $x, y \in \mathbb{R}$, что $(1+2i)x + (3-5i)y = 1-3i$.

1.3. Решить уравнения
$$z^2 = i, \qquad z^2 = 5-12i, \qquad z^2 + (2i-7) + 13 - i = 0.$$

1.4. Найти все z, для которых

а) $z^2 = \bar{z}$, б) $z^n = \bar{z}$.

1.5. Найти тригонометрическую форму чисел
$$1+i, \quad \sin\alpha + i\cos\alpha, \quad 2+\sqrt{3}+i, \quad \frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}.$$

1.6. Вычислить:
$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}, \quad (1+\cos\alpha + i\sin\alpha)^k.$$

1.7. Решить уравнения: $|z| - z = 1+2i, \quad |z| + z = 2+i.$

1.8. Доказать, что

а) если $|z| < 1$, то $|z^2 - z + i| < 3$,

б) если $|z| \leqslant 2$, то $1 \leqslant |z^2 - 5| \leqslant 9$.

1.9. Доказать, что всякое комплексное число $z \neq -1$ с $|z| = 1$ может быть представлено в виде
$$z = \frac{1+it}{1-it}$$
для некоторого $t \in \mathbb{R}$.

1.10. Доказать, что если $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$, то $z^m + \frac{1}{z^m} = 2\cos m\theta$, при $m \in \mathbb{Z}$.

1.11. Вычислить в алгебраической форме
$$\sqrt{8\sqrt{3}i - 8}, \quad \sqrt[3]{\frac{27-54i}{2+i}}, \quad \sqrt[3]{1+i}.$$

1.12. Выразить в радикалах $\cos(2\pi/5)$, $\sin(4\pi/5)$.

1.13. Вычислить суммы:

$$1-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+\dots,\qquad \binom{n}{1}+\binom{n}{5}+\binom{n}{9}+\dots,$$

$$\binom{n}{1}-\frac{1}{3}\binom{n}{3}+\frac{1}{9}\binom{n}{5}-\dots,$$

$$1+2\varepsilon+3\varepsilon^2+\dots+n\varepsilon^{n-1},\ \text{где } \varepsilon^n=1.$$

1.14. Вычислить суммы

$$\sin^2 x+\sin^2 3x+\dots+\sin^2(2n-1)x,$$

$$\cos x+2\cos 2x+\dots+n\cos nx.$$

1.15. Является ли число $\frac{2+i}{2-i}$ корнем из единицы?

1.16. а) Найти $\varepsilon_0^k+\dots+\varepsilon_{n-1}^k$, где $k\in\mathbb{Z}$, а $\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_{n-1}$ — все корни степени n из 1.

б) Если степень многочлена $f(z)$ меньше n, то среднее арифметическое значений многочлена $f(z)$ в вершинах правильного n-угольника равно его значению в центре этого n-угольника.

в) Если точки $P_0,P_1,\dots,P_n\in\mathbb{C}$ таковы, что для любого многочлена $f(z)$ степени меньше n выполняется равенство

$$f(P_0)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(P_j),$$

то $P_1,\dots,P_n$ суть вершины правильного n-угольника с центром P_0.

1.17. Решить уравнения и разложить их левые части на множители с вещественными коэффициентами:

$$x^4+6x^3+9x^2+100=0,\qquad x^4+2x^2-24x+72=0.$$

1.18. Разделить с остатком

а) $2x^5-5x^3-8x$ на $x+3$,

б) $4x^3+x^2$ на $x+1+i$.

1.19. Пользуясь алгоритмом Евклида, найти (f_1,f_2) и многочлены g_1,g_2 такие, что $(f_1,f_2)=f_1g_1+f_2g_2$, если

а) $f_1=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9,\ f_2=2x^3-x^2-5x+4,$

б) $f_1=x^5+5x^4+9x^3+7x^2+5x+3,\ f_2=x^4+2x^3+2x^2+x+1.$

1.20. Исключить иррациональность в знаменателе:

а) $\dfrac{\alpha}{\alpha+1}$, если $\alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0$;

б) $\dfrac{\alpha^2 - 3\alpha - 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1}$, если $\alpha^3 + \alpha^2 + 3\alpha + 4 = 0$;

в) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}$.

1.21. Найти

а) $\big((x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1), (x+1)(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1)\big)$,

б) $(x^n - 1, x^m - 1)$.

1.22. При каких условиях на $m, n, k \in \mathbb{N}$

$$(x^4 + x^2 + 1) \mid (x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3k+2})\,?$$

1.23. Доказать, что если $(x-1)^k \mid f(x^n)$, то и $(x^n - 1)^k \mid f(x^n)$.

1.24. Разложить многочлен

$$f(x) = (x-2)^4 + 4(x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 10(x-2) + 20$$

а) по степеням x, б) по степеням $x+2$.

1.25. Найти кратность корня $x_0 = 2$ многочлена

$$x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8.$$

1.26. Остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x-a$ равен A, а от деления на $x-b$ $(a \neq b)$ равен B. Найти остаток от деления $f(x)$ на $(x-a)(x-b)$.

1.27. Найти все A, B, при которых трехчлен $Ax^{n+1} + Bx^n + 1$ делится на $(x-1)^2$.

1.28. При каких условиях на a, b, c многочлен

$$x^5 + 10ax^3 + 5bx + c$$

имеет трехкратный ненулевой корень?

1.29. Доказать, что многочлен $a_1x^{p_1} + a_2x^{p_2} + \dots + a_kx^{p_k}$ не имеет корней кратности выше $(k-1)$, отличных от нуля.

1.30. Пусть коэффициенты многочлена f лежат в поле нулевой характеристики. Доказать, что $f' \mid f$ тогда и только тогда, когда $f = a(x-x_0)^n$.

1.31. Доказать, что многочлен

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

не имеет кратных корней. Пользуясь методом Штурма, найти количество его вещественных корней.

1.32. Пусть многочлен $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ имеет корни $x_1, \dots, x_n$. Какие корни имеют многочлены

а) $a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} + \dots + (-1)^n a_0$, б) $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$,

в) $a_n x^n + a_{n-1} b x^{n-1} + \dots + a_0 b^n$, г) $f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}x + \dots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n$?

1.33. При каких условиях корни x_1, x_2, x_3 трехчлена $x^3 + px + q$ связаны соотношением $x_3 = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$?

1.34. Указать многочлен степени 4, корнями которого являются

$$\alpha,\ 1/\alpha,\ -\alpha,\ -1/\alpha.$$

1.35. Указать многочлен степени 6, корнями которого являются

$$\alpha,\ 1/\alpha,\ 1-\alpha,\ 1/(1-\alpha),\ 1-1/\alpha,\ 1/(1-1/\alpha).$$

1.36. а) Доказать, что если комплексные числа $z_1, \dots, z_n$ таковы, что $\dfrac{1}{z_1} + \dots + \dfrac{1}{z_n} = 0$, то отвечающие им точки на плоскости не могут лежать по одну сторону от прямой, проходящей через нуль.

б) Корни $f'(z)$ лежат в выпуклой оболочке корней $f(z)$.

1.37. а) Найти все обратимые элементы кольца $k[[t]]$ формальных степенных рядов над полем k.

б) При каких условиях дробь $\dfrac{P(t)}{Q(t)}$, где $P(t), Q(t) \in k[t]$, может быть записана виде формального степенного ряда?

в) Верно ли, что всякий формальный степенной ряд происходит из некоторой рациональной дроби?

г) Показать, что ряд $\sum a_n t^n \in k[[t]]$ происходит из рациональной дроби тогда и только тогда, когда его коэффициенты удовлетворяют некоторому рекуррентному соотношению вида

$$\alpha_k a_{n+k} + \alpha_{k-1} a_{n+k-1} + \dots + \alpha_0 a_n = 0$$

с $\alpha_i \in k$.

д) Найти явную формулу для n-ого члена последовательности Фибоначчи 1,1,2,3,5,8,13,21...

е) Описать все решения рекуррентного уравнения

$$a_n + A a_{n-1} + B a_{n-2} = 0.$$

1.38. Найти разложение в формальный степенной ряд дроби $1/(1-t)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Записать полученные коэффициенты в «обобщенный треугольник Паскаля».

1.39. а) Доказать, что для любого ряда $f = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots \in k[[t]]$ существует такой единственный ряд $g = 1 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots$, что $g^d = f$, $d \in \mathbb{N}$.

б) Какие условия нужно наложить на кольцо A, чтобы утверждение предыдущего пункта было верно для ряда $f \in A[[t]]$?

в) Доказать, что если уравнение $F(z) = 0$ с $F(z) \in k[z]$ имеет решение $z = a_0 \in k$ и $F'(a_0) \neq 0$, то существует единственный формальный степенной ряд вида $f = a_0 + a_1 t + \dots \in k[[t]]$ такой, что $F(f) = 0$ (лемма Гензеля).

1.40. Найти количество a_k неприводимых над $\mathbb{F}_p$ многочленов степени k со старшим коэффициентом 1, пользуясь следующей схемой рассуждений.

а) В кольце формальных степенных рядов $\mathbb{Q}[[t]]$ имеет место равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^n t^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - a_k t^k}.$$

б) Корректно определено отображение $\log\colon 1 + t\mathbb{Q}[[t]] \to \mathbb{Q}[[t]]$ по правилу

$$\log(1 - tf) = -\sum_{s \geqslant 1} \frac{(tf)^s}{s}.$$

При этом $\log(fg) = \log f + \log g$ для $f, g \in 1 + t\mathbb{Q}[[t]]$.

в) Прологарифмировать равенство пункта а) и воспользоваться формулой обращения Мебиуса: если $A_n = \sum\limits_{d|n} B_d$, то $B_n = \sum\limits_{d|n} \mu(n/d) A_d$, где

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ (-1)^r, & \text{если } n = p_1 \dots p_r \text{ и все } p_i \text{ различны}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

г) Вычислить $a_1, \dots, a_5$ для $\mathbb{F}_2$ вручную и по полученной формуле.