10. Группы

10.1. Пусть $X(\mathbb{R})$ — множество точек вещественной плоскости, лежащих на кривой $y = x^3$. Определим сумму $P \oplus Q$ точек $P, Q \in X$ следующим образом: проведем прямую, соединяющую точки P и Q (касательную, если $P = Q$), тогда $P \oplus Q$ есть точка, центрально симметричная относительно начала координат к точке пересечения кривой X и проведенной прямой. Найти нейтральный элемент относительно операции $\oplus$. Доказать, что множество X образует абелеву группу относительно операции $\oplus$. Доказать, что обратный элемент к точке P есть точка, центрально симметричная ей относительно начала координат. Проверить, что подмножество $X(\mathbb{Q})$ рациональных точек той же кривой образует подгруппу в $(X(\mathbb{R}), \oplus)$.

10.2. Привести несколько примеров бесконечных групп, каждый элемент которых имеет конечный порядок.

10.3. Доказать, что в группе четного порядка обязательно содержится элемент порядка 2.

10.4. Доказать, что пересечение конечного числа подгрупп конечного индекса есть подгруппа конечного индекса.

10.5. Доказать, что в конечно порожденной группе существует лишь конечное число подгрупп, индекс которых не превосходит заданного натурального числа N.

10.6. Верно ли, что всякая подгруппа конечно порожденной группы также конечно порождена?

10.7. При каких n и k отображение

$$k^\times \times SL_n(k) \to GL_n(k), \quad (\lambda, g) \mapsto \lambda \cdot g$$

является изоморфизмом?

10.8. Доказать, что i-ый коммутант $G^{(i)}$ группы G нормален в G.

10.9. Привести пример ситуации, когда $K \lhd H$, $H \lhd G$, но подгруппа K не является нормальной в G.

10.10. Доказать, что группа G разрешима тогда и только тогда, когда существует нормальный ряд

$$G \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_N \rhd \{e\}$$

с $G_i/G_{i+1} \cong Z_{n_i}$.

10.11. Доказать, что факторгруппа неабелевой группы по центру не может быть циклической. Верно ли, что факторгруппа неабелевой группы по центру не может быть абелевой?

10.12. Вычислить порядки групп $SL_n(\mathbb{F}_q)$ и $PSL_n(\mathbb{F}_q)$.

10.13. Вычислить порядок $\varphi(n, m)$ группы $GL_n(\mathbb{Z}_m)$. (Заметим, что $\varphi(1, m)$ совпадает со значением функции Эйлера $\varphi(m)$.)

10.14. Доказать, что отображение редукции по модулю N

$$SL_n(\mathbb{Z}) \to SL_n(Z_N)$$

является эпиморфизмом. Найти порядок группы $SL_n(Z_N)$.

10.15. Описать орбиты действия $X \mapsto CXC^{-1}$ группы $GL_n(\mathbb{C})$ на себе.

10.16. Описать орбиты действия группы $O(2, 1)$ в $\mathbb{R}^3$.

10.17. Доказать, что в группе S_n любой элемент есть произведение двух инволюций. Верно ли это утверждение для A_n?

10.18. Доказать, что любые две инволюции g_1, g_2 в произвольной конечной группе G порождают группу диэдра $D_{2|g_1 g_2|}$.

10.19. Доказать, что любая группа порядка p^n разрешима, а порядка p^2 — абелева. (Трудная теорема Бернсайда утверждает, что всякая группа порядка $p^a q^b$, где p и q — различные простые числа, разрешима. Из этого следует, что порядок простой группы должен делиться по крайней мере на три различных простых числа!)

10.20. Доказать, что если $p^n \mid |G|$, где p — простое число, то в G существует подгруппа порядка p^n.

10.21. Доказать, что всякая группа порядка p^2q, где p и q — различные простые числа, разрешима.

10.22. Если p и q — различные простые числа и $q-1$ не делит p, то всякая группа порядка pq является циклической.

10.23. Доказать разрешимость всех групп, порядок которых меньше 60.

10.24. Доказать коммутативность всех групп порядков 185 и 255.

10.25. Пусть p, q и r — различные простые числа. Доказать, что неразрешимая группа порядка p^2qr изоморфна A_5.

10.26. а) Доказать, что группа $SL_n(k)$ порождается трансвекциями, т. е. матрицами вида $t_{ij}(\lambda) = E + \lambda E_{ij}$.

б) Вычислить (групповой) коммутатор двух трансвекций.

в) Доказать, что если k — поле, то при $n \geqslant 3$

$$GL_n(k)' = SL_n(k)' = SL_n(k),$$

а при $|k| > 3$ имеем

$$GL_2(k)' = SL_2(k)' = SL_n(k).$$

г) Объясните, почему группа $SL(2, \mathbb{F}_3)$ порядка 24 разрешима.

10.27. Описать классы сопряженных элементов в группе $SL_2(\mathbb{F}_p)$.

10.28. Пусть p — нечетное простое число. Докажите, что группа порядка $2p$ изоморфна либо Z_{2p}, либо D_p.

10.29. Классифицировать (с точностью до изоморфизма) все группы, порядок которых не превосходит 11.

10.30. Классифицировать (с точностью до изоморфизма) все группы порядка 12.

10.31. а) Используя действие на проективной прямой, построить гомоморфизм $SL_2(\mathbb{F}_3) \to S_4$ и доказать, что его ядро изоморфно Z_2, а образ есть A_4.

б) Является ли группа $SL_2(\mathbb{F}_3)$ (полу)прямым произведением групп Z_2 и A_4?

10.32. Доказать, что все образы группы Q_8 в группе S_8, получающиеся при применении теоремы Кэли, сопряжены друг другу. Верно ли, что все подгруппы группы S_8, изоморфные Q_8, сопряжены?

10.33. Доказать, что $SL_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$.

10.34. По каждой конечной группе G построим ориентированный граф, вершины которого отвечают подгруппам G, а ребра — отношениям включения. Этот граф называется структурой подгрупп.

а) Описать все группы, структура подгрупп которых тривиальна, т. е. состоит из двух вершин и одного ребра.

б) Изоморфны ли группы, имеющие одинаковые структуры подгрупп?

в) Назовем структуру подгрупп размеченной, если в каждой вершине указан класс изоморфизма соответствующей подгруппы. Предположим, что для двух групп их размеченные структуры подгрупп совпадают везде, за исключением вершин, отвечающих самим группам. Изоморфны ли эти группы?

10.35. Доказать, что у любой конечной группы движений евклидова пространства всегда есть неподвижная точка.

10.36. Описать все конечные подгруппы групп O_2, SO_2.

10.37. Пусть L — решетка в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$, $\mathrm{Aut}\, L$ — группа движений, оставляющих на месте точку 0 и переводящих L в себя.

а) Доказать, что группа $\mathrm{Aut}\, L$ конечна.

б) Для $n = 2, 3$ найти решетки, у которых порядок $\mathrm{Aut}\, L$ максимален.

в) Привести нижнюю и верхнюю оценки максимального порядка группы $\mathrm{Aut}\, L$ для данной размерности n.

10.38. Для каждой из следующих групп

$$Z_n,\ S_n,\ D_{2n},\ D_{2n+1},\ Q_8,\ A_3,\ A_4$$

вычислить центр, коммутант, факторгруппу по коммутанту, описать классы сопряженных элементов и найти их мощности (это понадобится для описания представлений).

10.39. Доказать, что симметрическая группа S_n является n-транзитивной, а группа A_n — $(n-2)$-транзитивна. Доказать, что любая $(n-2)$-транзитивная группа, действующая на множестве из n элементов, изоморфна либо S_n, либо A_n. (Действие группы G на множестве X называется k-транзитивным, если любой набор из k различных элементов множества X действием некоторого элемента из G может быть переведен в любой другой такой набор.)

10.40. Предположим, что группа G транзитивно действует на множестве X, и пусть существует такая нормальная подгруппа H, что

$$G_x \cap H = \{e\} \quad \text{и} \quad G_x H = G.$$

Тогда

1) естественное действие стабилизатора G_x на H сопряжениями эквивалентно действию G_x на X;

2) если G — m-транзитивна и $|X| = n$, то

   если $m = 2$, то $n = p^k$ и $H \cong (Z_p)^r$ — элементарная абелева p-группа, если $m = 3$, то $n = 2^l$ или $n = 3$ и $G \cong S_3$, а

при $m \geqslant 4$ имеем $m = n = 4$ и $G \cong S_4$.

10.41. Вывести из результатов двух предыдущих задач простоту группы A_n при $n \geqslant 5$.

10.42. Пусть действие группы G на множестве X транзитивно. Это действие G называется примитивным, если стабилизатор G_x — максимальная по включению подгруппа. Доказать, что всякое 2-транзитивное действие примитивно.

10.43. Пусть действие $G\colon X$ эффективно, транзитивно и примитивно, и $\{e\} \neq H \lhd G$. Доказать, что действие H на X транзитивно и $G = G_x H$.

10.44. Используя результаты предыдущих задач, доказать следующую теорему Ивасавы. Пусть группа G примитивно действует на множестве X и

1) $G = G'$,

2) для каждого $x \in X$ стабилизатор G_x содержит абелеву нормальную подгруппу H_x,

3) подгруппы H_x порождают G (или для фиксированной точки x подгруппа H_x нормально порождает G).

Тогда группа G проста.

10.45. Вывести из теоремы Ивасавы простоту групп $PSL_n(K)$ при $|K| \geqslant 4$.

10.46. Используя теорему Ивасавы, доказать простоту группы A_5.