12. Группы и алгебры Ли

12.1. Найти касательную алгебру следующих групп: SL_n, O_n, SO_n, U_n, SU_n, Sp_n, Aff_n.

12.2. Доказать, что конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n)$ может быть превращено в представление группы Ли $SL(n)$ («проинтегрировано»).

12.3. Доказать, что $\mathrm{Ad}(e^X) = e^{\mathrm{ad}\, X}$.

12.4. Доказать, что всякая нильпотентная алгебра Ли размерности 2 коммутативна.

12.5. Доказать, что всякая двумерная некоммутативная алгебра Ли разрешима, но не нильпотентна.

12.6. Описать все вещественные алгебры Ли размерности 2.

12.7. Описать неприводимые комплексные представления групп $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, S^1.