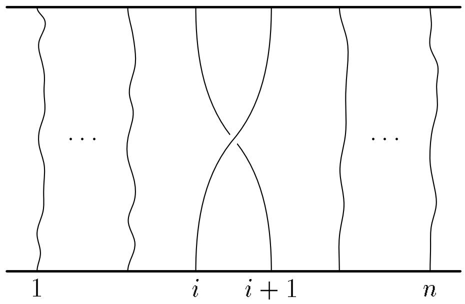
13. Представления группы кос

13.1. Доказать, что группа кос B_n может быть описана как группа, порожденная образующими $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$, удовлетворяющими соотношениям

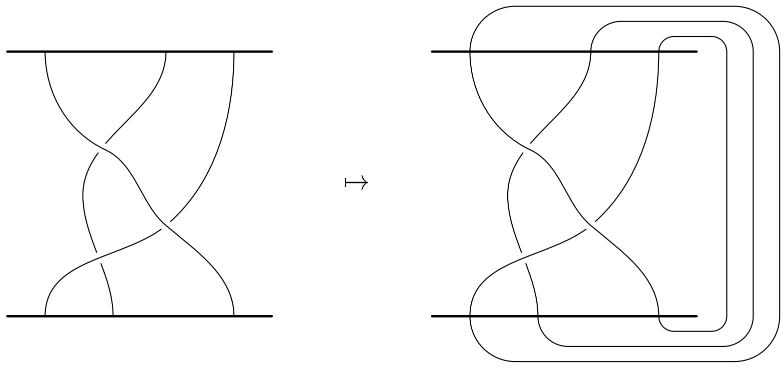
$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ при } |i-j|>1,$$
$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}.$$

При этом

$\sigma_i =$ 

13.2. Имеется эпиморфизм групп $B_n \to S_n$, при котором $\sigma_i \mapsto$ $\mapsto (i, i+1)$.

13.3. Доказать, что всякое зацепление может быть получено как замыкание некоторой косы:



13.4. Пусть $R\colon V \otimes V \to V \otimes V$ — некоторый линейный оператор, $\dim V = m$. Показать, что сопоставление

$$\rho\colon \sigma_i \mapsto 1 \otimes \cdots \otimes R \otimes \cdots \otimes 1,$$

где оператор R действует на i-й и $i+1$-й тензорные сомножители в $V^{\otimes N}$, продолжается до представления группы B_n тогда и только тогда, когда R удовлетворяет квантовому уравнению Янга–Бакстера

$$(R \otimes 1)(1 \otimes R)(R \otimes 1) = (1 \otimes R)(R \otimes 1)(1 \otimes R) \qquad \text{(QYBE)}$$

13.5. Проверить, что следующие операторы удовлетворяют (QYBE):

а) $P\colon x \otimes y \mapsto y \otimes x$,

б) $R_q = \begin{pmatrix} -q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1} - q & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q \end{pmatrix}$,

в) если $\{v_1, \ldots, v_m\}$ — фиксированный базис пространства V, то положим

$$R_q(v_i \otimes v_j) = \begin{cases} v_j \otimes v_i, & \text{если } i > j, \\ -qv_i \otimes v_i, & \text{если } i = j, \\ v_j \otimes v_i + (q^{-1} - q)v_i \otimes v_j, & \text{если } i < j \end{cases}$$

(обобщение предыдущего примера).

г) $R_{p,q} = \begin{pmatrix} 1 & p & -p & pq \\ 0 & 0 & 1 & -q \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

При этом $R_1 = R_{0,0} = P$ и

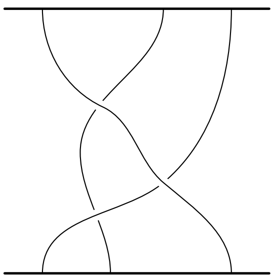
$$R_{p,q}^2 = 1, \quad (R_q + q)(R_q - q^{-1}) = 0.$$

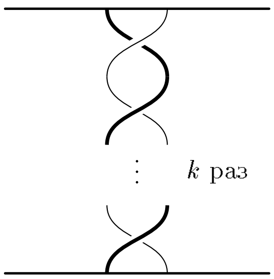
13.6. а) Представим косу σ как произведение образующих $\sigma = \sigma_{i_1} \ldots \sigma_{i_N}$. Тогда оператор

$$\rho(\sigma) = \rho(\sigma_{i_1}) \ldots \rho(\sigma_{i_N})$$

зависит только от косы σ, но не от выбора ее представления. В частности, число $t(\sigma) = \operatorname{tr} \rho(\sigma)$ есть инвариант косы.

б) Выбрав какой-нибудь оператор R из предыдущей задачи, вычислить инвариант $t(\sigma)$ для следующих кос:





в) Пусть оператор R фиксирован. Различает ли инвариант $t(\sigma)$ косы из B_n? Верно ли, что этот инвариант различает косы, если при заданном n взять оператор R_q из п. в) предыдущей задачи с достаточно большим m (зависящим только от n)?