14. Конечномерные представления $GL_n(\mathbb{C})$

Везде ниже

$G = GL_n(\mathbb{C})$,

$T = (\mathbb{C}^\times)^n$ — максимальный тор, реализованный диагональными матрицами,

B_+, B_- — борелевские подгруппы, состоящие из верхних и нижних треугольных матриц соответственно,

V — тавтологический G-модуль,

все G-модули предполагаются конечномерными комплексными векторными пространствами,

G-модуль U называется полиномиальным, если он происходит из некоторого $\operatorname{End} V$-модуля.

14.1. Найти группы характеров (т. е. одномерных представлений) групп T, $B_\pm$, G.

14.2. Показать, что всякий G-модуль U после ограничения на тор разлагается в прямую сумму T-модулей U_λ:

$$U = \bigoplus_{\lambda \in P(U)} U_\lambda.$$

Можно считать, что λ есть набор целых чисел $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и тогда

$$U_\lambda = \{\, u \in U \mid t.u = t_1^{\lambda_1} \ldots t_n^{\lambda_n} u \text{ для всех } t \in T \,\}.$$

Набор λ называется весом, указанное разложение модуля U — весовым, подпространство U_λ — весовым подпространством, его элементы — весовыми векторами, размерность U_λ называется кратностью веса λ, множество $P(U)$ — множеством весов G-модуля U.

На множестве $\mathbb{Z}^n$ всех весов введем лексикографический порядок, полагая $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) > (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, если $\lambda_1 > \mu_1$ или $\lambda_1 = \mu_1$, но $\lambda_2 > \mu_2$ или $\lambda_2 = \mu_2$, но $\lambda_3 > \mu_3 \ldots$

14.3. Найти веса и весовые векторы G-модулей $\bigwedge^k V$, $S^k V$.

14.4. Пусть U есть B_+-модуль и $v \in U$ — весовой вектор веса λ. Тогда для $b \in B_+$ имеем $b.v = \lambda v + u$, где u есть некоторый вектор, лежащий в подпространстве U, порожденном векторами, веса которых больше λ. Поэтому если вес вектора v является наибольшим, то прямая $\langle v \rangle$ является B_+-инвариантной. (Таким образом, индекс «+» в обозначении B_+ указывает на то, что действие группы B_+ повышает веса. В том же смысле действие B_- понижает их.)

14.5. Пусть U есть G-модуль, порожденный вектором старшего веса v_λ, т. е. $U = G.v_\lambda$ и $B_+\langle v_\lambda\rangle = \langle v_\lambda\rangle$. Тогда

а) любой другой вес в U строго меньше λ и размерность U_λ равна 1;

б) в U содержится единственное максимальное собственное инвариантное подпространство, фактор по которому есть неприводимое представление.

14.6. а) Всякое неприводимое представление является представлением старшего веса.

б) Неприводимые представления одного и того же старшего веса изоморфны.

Неприводимое представление старшего веса λ обозначается $L(\lambda)$.

14.7. Пусть $\omega_k = (1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (единицы стоят на первых k местах). Тогда $L(\omega_k) = \bigwedge^k V$.

14.8. Пусть $H \subset G$ — некоторая подгруппа, U — ее представление. Положим

$$\operatorname{Ind}_H^G U = \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} U.$$

Доказать закон взаимности Фробениуса:

$$\operatorname{Hom}_{H-\mathrm{mod}}(\operatorname{Res}_H^G W, U) = \operatorname{Hom}_{G-\mathrm{mod}}(W, \operatorname{Ind}_H^G U),$$

где $\operatorname{Res}_H^G W$ есть ограничение представления W группы G на подгруппу U.

14.9. Пусть $H^0(\lambda) = \operatorname{Ind}_G^{B_+}(\lambda)$, где λ — одномерное представление B_+, определенное как

$$\begin{pmatrix} t_1 & * & \dots & * \\ 0 & t_2 & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_n \end{pmatrix} \mapsto t_1^{\lambda_1} t_2^{\lambda_2} \dots t_n^{\lambda_n}.$$

Доказать, что

а) В пространстве $H^0(\lambda)$ существует единственная B_+-инвариантная прямая и ее вес равен λ.

б) $H^0(\lambda)$ обладает единственным неприводимым подпредставлением, изоморфным $L(\lambda)$.

в) Всякий другой композиционный фактор $H^0(\lambda)$ имеет вес строго меньший λ.

14.10. Если G-модуль U обладает единственным неприводимым подмодулем, изоморфным $L(\lambda)$, и любой другой композиционный фактор U имеет вес строго меньший λ, то U изоморфен подмодулю в $H^0(\lambda)$.

14.11. Назовем вес $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ доминантным, если $\lambda_1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_n$. Доказать эквивалентность следующих утверждений:

а) вес λ доминантен,

б) $H^0(\lambda) \neq 0$,

в) существует $L(\lambda)$.

14.12. Пусть $U = \bigoplus\limits_{\lambda} U_\lambda$ — весовое разложение G-модуля U. Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}[\, e^\lambda \mid \lambda \in \mathbb{Z}^n]$, в котором $e^\lambda e^\mu = e^{\lambda+\mu}$, и его элемент

$$\operatorname{ch} U = \sum_\lambda (\dim U_\lambda) e^\lambda.$$

Он называется характером модуля U. Доказать, что

а) $\operatorname{ch}(U \otimes U') = \operatorname{ch} U \operatorname{ch} U'$.

б) $\operatorname{ch} U^* = \sum\limits_\lambda (\dim U_\lambda) e^{-\lambda}$.

в) $\operatorname{ch} U = \operatorname{ch} U'$ тогда и только тогда, когда модули U и U' имеют один и тот же набор композиционных факторов. Таким образом, отображение ch корректно определено на кольце Гротендика категории конечномерных представлений группы G.

г) характер $\operatorname{ch} U$ является S_n-инвариантом, если считать, что $\sigma \in S_n$ действует на вес $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ перестановкой компонент:

$$\sigma(\lambda) = (\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)})$$

и $\sigma e^\lambda = e^{\sigma(\lambda)}$.

д) $L(\lambda)^* = L(-w_0(\lambda))$, где

$$w_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

есть элемент «наибольшей длины» в S_n.

14.13. Пусть λ и μ — доминантные веса, а последовательность

$$0 \to L(\lambda) \to U \to L(\mu) \to 0$$

точна и нерасщепима. Тогда либо U есть подмодуль в $H^0(\lambda)$, либо U^* есть подмодуль в $H^0(\mu)$.

14.14. Доказать эквивалентность следующих утверждений:

а) Всякий G-модуль вполне приводим.

б) Модули $H^(\lambda)$ неприводимы для доминантных весов λ.

б) $\operatorname{Ext}^1_{G-\mathrm{mod}}(L(\lambda), L(\mu)) = 0$ для всех доминантных весов λ и μ.

14.15. Пусть в $V^{\otimes N}$ группа S_N действует перестановками тензорных сомножителей, а $\operatorname{End}_{S_N}(V^{\otimes N})$ есть кольцо эндоморфизмов $V^{\otimes N}$, перестановочных с этим действием. Доказать, что

$$\operatorname{End}_{S_N}(V^{\otimes N}) \cong S^N(\operatorname{End} V).$$

14.16. Определим алгебру Шура Sch как (пополненную) прямую сумму $\mathrm{Sch} = \hat{\bigoplus\limits_N} \mathrm{Sch}_N$ с

$$\begin{aligned} \mathrm{Sch}_0 &= \mathbb{C}, \\ \mathrm{Sch}_1 &= \mathrm{End}\, V, \\ \mathrm{Sch}_N &= \mathrm{End}_{S_N}(V^{\otimes N}), \end{aligned}$$

а алгебру M как прямую сумму $\mathrm{M} = \bigoplus\limits_N \mathrm{M}_N$ с $\mathrm{M}_N = S^N((\mathrm{End}\, V)^*)$. Проверить, что эти алгебры являются биалгебрами и что естественное спаривание между Sch_1 и M_1 продолжается до невырожденного спаривания между Sch и M, согласованного со структурами биалгебр (умножение в Sch переходит в коумножение в M и наоборот).

14.17. Построить взаимно однозначное соответствие между левыми $\mathrm{End}\, V$-модулями и правыми M-комодулями, пользуясь тем, что по двойственности отображение $\mathrm{End}\, V \times U \to U$ определяет отображение $U^* \to U^* \otimes (\mathrm{End}\, V)^*$. Показать, что при полученном соответствии сохраняется полупростота объектов этих категорий.

14.18. Доказать, что групповая алгебра $\mathbb{C}S_N$ полупроста, поэтому полупроста и алгебра Sch. Следовательно, все полиномиальные G-модули вполне приводимы.

14.19. Докажите, что

а) $L(\omega_n)^{\otimes m} \otimes H^0(\lambda) \cong H^0(\lambda + m\omega_n)$.

б) G-модуль $H^0(\lambda)$ при $\lambda > 0$ полиномиален.

в) G-модуль $H^0(\lambda)$ при доминантном λ неприводим.

Таким образом, доказана полная приводимость всякого G-модуля. В следующих задачах описывается реализация полиномиальных неприводимых модулей старшего веса.

14.20. Доказать, что алгебра $\mathbb{F}$ однородных функций на пространстве полных флагов в V порождается плюккеровыми координатами $\pi_I = \pi_{i_1,\ldots,i_k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, которые кососимметричны относительно перестановок элементов мультииндекса I и удовлетворяют серии соотношений Плюккера:

$$\sum_{\substack{K \subset I, \\ l(K)=s}} \epsilon((I-K)*K)\pi_{L*(I-K)}\pi_{K*J} = 0,$$

для всех мультииндексов L, I, J и чисел s таких, что $l(I) \geqslant s$ и $l(L) + l(I) - s \geqslant s + l(J)$. Здесь I, J, K, L — упорядоченные мультииндексы, $l(I)$ и т. д. — длина мультииндекса, $I - K$ получается из I вычеркиванием элементов из K, $K * J = (k_1, \ldots, k_s, j_1, \ldots, j_t)$ — конкатенация двух мультииндексов, наконец, $\epsilon((I-K)*K)$ есть -1 в степени равной числу инверсий в наборе $(I-K)*K$.

14.21. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ — некоторое разбиение числа n, т.е. $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s = n$ и $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \dots \geqslant \alpha_s > 0$. Обозначим через $\mathbb{F}^\alpha$ подпространство в $\mathbb{F}$, порожденное мономами вида $\pi_{I_1} \dots \pi_{I_s}$ с $l(I_k) = \alpha_k$. Докажите, что

а) алгебра $\mathbb{F}$ градуирована разбиениями n, т.е. $\mathbb{F} = \bigoplus_\alpha \mathbb{F}^\alpha$ и $\mathbb{F}^\alpha \mathbb{F}^\beta \subset \mathbb{F}^{\alpha+\beta}$.

б) $\mathbb{F}^{(k)} \cong \bigwedge^k V$ и $\mathbb{F}^{(1,\dots,1)} \cong S^l V$ (если $l((1,\dots,1)) = l$) как G-модули.

14.22. а) Проверить, что алгебра $\mathbb{F}$ есть G-модуль относительно следующего действия (заданного на образующих и продолженного по мультипликативности и линейности)

$$g.\pi_I = \sum_J |g_I^J| \pi_J,$$

где $|g_I^J|$ есть минор матрицы g, составленный из строк с номерами из I и столбцов с номерами из J.

б) Относительно этого действия $\mathbb{F}^\alpha$ есть модуль старшего веса, являющийся подмодулем в $H^0(\alpha^t)$, где α_i^t есть количество α_j не меньших, чем i. Следовательно, $L(\lambda) \cong H^0(\lambda) \cong \mathbb{F}^{\lambda^t}$ при $\lambda > 0$.

14.23. Схемой Юнга $Y(\alpha)$, отвечающей разбиению α числа n, называется множество

$$\{\, (i,j) \mid 1 \leqslant j \leqslant s,\ 1 \leqslant i \leqslant \alpha_j \,\}.$$

Таблица Юнга — это отображение $T\colon Y(\alpha) \to \{1, \dots, n\}$. Таблица Юнга T называется стандартной, если числа в ее строках строго возрастают (слева направо), а в столбцах — не убывают (сверху вниз). Моном $\pi_{I_1} \dots \pi_{I_s}$ называется стандартным, если таблица Юнга со строками $I_1, \dots, I_s$ стандартна. Доказать, что, выбирая подходящим образом параметры в соотношениях Плюккера, любой моном вида $\pi_I \pi_J$ можно выразить через линейную комбинацию стандартных мономов. С помощью индукции показать далее, что алгебра $\mathbb{F}$ порождается стандартными мономами. Наконец, пользуясь тем, что плюккеровы координаты суть детерминанты некоторых матриц, доказать, что стандартные мономы линейно независимы. Таким образом, они составляют базис алгебры $\mathbb{F}$.

14.24. Пользуясь стандартными таблицами Юнга, найти $\dim L(\lambda)$ для $G = GL_3$ при $\lambda = (5,3,2)$, $\lambda = (4,2,1)$.

14.25. Разложить $V^{\otimes 3}$ в сумму неприводимых G-модулей.