# 15. Довески

**15.1.** а) Используя действие на проективной прямой, постройте гомоморфизм $SL(2,\mathbb{F}_3) \to S_4$ и докажите, что его ядро изоморфно $Z_2$, а образ есть $A_4$.

б) Является ли группа $SL(2,\mathbb{F}_3)$ (полу)прямым произведением групп $Z_2$ и $A_4$?

**15.2.** Доказать, что образы группы $Q_8$ в группе $S_8$, получающиеся при применении теоремы Кэли, сопряжены друг другу. Верно ли, что все подгруппы $S_4$, изоморфные $Q_8$, сопряжены?

**15.3.** Доказать, что $SL(2,\mathbb{F}_2) \cong S_3$.

**15.4.** По каждой конечной группе $G$ построим ориентированный граф, вершины которого отвечают подгруппам $G$, а ребра — отношениям вложенности. Этот граф называется структурой подгрупп.

а) Описать все группы, структура подгрупп которых тривиальна, т. е. состоит из двух вершин и одного ребра.

б) Изоморфны ли группы, имеющие одинаковые структуры?

в) Назовем структуру размеченной, если в каждой вершине указан класс изоморфизма соответствующей подгруппы. Предположим, что для двух групп их размеченные структуры совпадают везде, за исключением вершин, отвечающих самим группам. Изоморфны ли эти группы?

**15.5.** Пусть $\rho\colon \mathfrak{sl}_n \to \mathfrak{gl}(V)$ есть представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n$. Доказать, что образ этого представления содержится в $\mathfrak{sl}(V)$.