4. Линейная алгебра

Определения. Базисы. Сопряженное пространство

4.1. Проверить, что множество $\mathbb{R}_+$ есть векторное пространство над $\mathbb{R}$ относительно операций $v + u = vu$, $\alpha \cdot v = v^\alpha$. Чему равна размерность этого пространства?

4.2. Можно ли ввести структуру векторного пространства на множестве $\mathbb{N}$ над полями $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_2$?

4.3. При каких условиях векторное пространство $\mathbb{R}^n$ над $\mathbb{R}$ может быть превращено в векторное пространство над $\mathbb{C}$?

4.4. а) Доказать, что поле является векторным пространством над любым своим подполем.

б) Чему может равняться количество элементов конечного поля?

4.5. Найти количество элементов линейной оболочки векторов

$$(1,0,2,1),\ (1,1,2,2),\ (2,1,1,0),\ (0,2,0,2)$$

над полем $\mathbb{F}_3$.

4.6. Доказать, что функции (соответственно, формальные степенные ряды) $1, \sin x, \ldots, \sin nx$ линейно независимы как элементы пространства $C^\infty[0,1]$ (соответственно, $\mathbb{R}[[x]]$) над $\mathbb{R}$.

4.7. Пусть $V = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. Доказать, что однородные многочлены степени d образуют подпространство H_d в V. Доказать, что однородные симметрические многочлены степени d образуют подпространство S_d в H_d. Найти размерности H_d, S_2, S_3 при произвольном n и размерность S_{10} при $n = 4$.

4.8. а) Найти количество наборов из k линейно независимых векторов (k-реперов) в пространстве $\mathbb{F}_q^n$.

б) Найти количество $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ k-мерных подпространств в $\mathbb{F}_q^n$.

4.9. Найти $\dim_k k[x]$, $\dim_k k[[x]]$.

4.10. Всегда ли верно, что $(V + U) \cap W = V \cap W + U \cap W$ для подпространств V, U, W некоторого векторного пространства?

4.11. Пусть $\dim V < \infty$, $U \subset V$, $U^0 \subset V^*$ — аннулятор подпространства U. Доказать, что

$$\dim U + \dim U^0 = \dim V,$$
$$(U^0)^0 = U,$$
$$(U_1 + U_2)^0 = U_1^0 \cap U_2^0,$$
$$(U_1 \cap U_2)^0 = U_1^0 + U_2^0.$$

4.12. Пусть $f, g\colon V \to k$ — линейные формы, причем $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$. Доказать, что f и g пропорциональны.

4.13. а) Доказать, что для конечномерного пространства V отображение $\varphi\colon V \to V^{**}$, $\quad v \mapsto \varphi_v$ при котором $\varphi_v(f) = f(v)$ определяет канонический (т.е. не зависящий от выбора базиса в V) изоморфизм.

б) Доказать, что никакое бесконечномерное пространство не изоморфного своему дважды сопряженному.

4.14. Доказать, что множество всех $t \in \mathbb{F}_{p^n}$, для которых разрешимо уравнение $x^p + x + t = 0$, есть векторное пространство над $\mathbb{F}_p$. Найдите его размерность.

4.15. Пусть $\mathcal{F}_{n,d}$ — множество флагов длины n в d-мерном пространстве V:

$$\mathcal{F}_{n,d} = \{F = (0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n = V)\}.$$

Определим для флагов F, F' матрицу $a(F, F') = a_{ij}$, в которой

$$a_{ij} = \dim F_i \cap F'_j / F_{i-1} \cap F'_j + F_i \cap F'_{j-1}.$$

Докажите, что

а) $\sum\limits_{i,j} a_{ij} = d$. Чему равны суммы $\sum\limits_{i} a_{ij}$, $\sum\limits_{j} a_{ij}$?

б) $a(F, F') = a(F', F)$.

в) Если $g \in GL(V)$, то $a(gF, gF') = a(F, F')$.

г) Для каждой матрицы $A = (a_{ij})$ с неотрицательными целыми элементами с $\sum_{i,j} a_{ij} = d$ существуют флаги F, F' такие, что $A = a(F, F')$.

д) Матрица $a(F, F')$ есть полный $GL(V)$-инвариант пары флагов F, F', т.е. пары (F, F') и $(\tilde{F}, \tilde{F}')$ лежат в одной $GL(V)$-орбите тогда и только тогда, когда $a(F, F') = a(\tilde{F}, \tilde{F}')$.

Билинейные и квадратичные формы

4.16. Доказать, что отображение $\mathrm{id}_k\colon C^k(S^1) \times C^k(S^1) \to \mathbb{R}$, при котором

$$\mathrm{id}_k(f, g) = \int\limits_{S^1} f(x) g^{(k)}(x)\, dx,$$

есть билинейная форма. При каких k она симметрична (кососимметрична)? Рассмотреть ограничение формы id_1 на пространство многочленов степени $\leqslant 5$ на окружности и вычислить матрицу этой формы в какомнибудь базисе этого пространства. Найти канонический базис для id_1 в этом пространстве. Найти левое и правое ядра формы.

4.17. Пусть $f(x, y)$ — такая билинейная форма, что

$$f(x, y) = 0 \iff f(y, x) = 0.$$

Доказать, что форма $f(x, y)$ либо симметрична, либо кососимметрична.

4.18. Найти индекс инерции

а) квадратичной формы $\operatorname{tr} X^2$ на пространстве матриц $\operatorname{Mat}(n, \mathbb{R})$,

б) квадратичной формы на четырехмерном пространстве, если известно, что главные миноры ее матрицы в некотором базисе удовлетворяют условиям

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 = \Delta_3 = 0, \quad \Delta_4 > 0.$$

4.19. Эквивалентны ли квадратичные формы

а) $f = 4x^2 + 8xy + 3x^2$ и $g = 3x^2 + 2xy + 3y^2$ над $\mathbb{Z}$?

б) $f = 3x^2 + 6xy$ и $g = 2x^2 + 3xy + 4y^2$ над $\mathbb{F}_7$?

4.20. Говорят, что квадратичная форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ над полем K, $\operatorname{char} k \neq 0$, представляет $\alpha \in K$, если найдется такой ненулевой набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ элементов поля K, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha$. Доказать, что

а) если $f \sim g$, то они представляют одни и те же элементы из k;

б) если форма f представляет $\alpha \neq 0$, то $f \sim \alpha y_1^2 + g(y_2, \ldots, y_n)$;

в) если форма f представляет 0, то она представляет все элементы поля k.

4.21. Квадратичная форма от двух переменных называется *бинарной. Дискриминантом* бинарной формы $f = f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ называется элемент поля $d_f = ac - b^2$. Предположим, что $\operatorname{char} k \neq 0$. Докажите, что

а) если бинарные формы f и g неособы (т.е. их дискриминанты отличны от нуля) и представляют 0, то $f \sim g$, более того, $f \sim g \sim x^2 - y^2$;

б) неособая бинарная форма f представляет 0 тогда и только тогда, когда $-d_f$ есть квадрат в поле k;

в) неособые бинарные формы f и g эквивалентны тогда и только тогда, когда отношение d_f/d_g есть квадрат в поле k и существует элемент $\alpha \in k$, представимый обеими формами.

г) Представляет ли нуль форма $-3x^2 + 8xy - 3y^2$ над полем $\mathbb{F}_{11}$?

4.22. а) Доказать, что невырожденная квадратичная форма над $\mathbb{F}_q$ эквивалентна форме вида $x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + dx_n^2$.

б) Если $n \geqslant 3$, то всякая квадратичная форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ над $\mathbb{F}_p$ $(p \neq 2)$ представляет нуль.

4.23. а) Любая вырожденная квадратичная форма представляет нуль.

б) Если форма $x^2-\alpha y^2$ представляет γ_1 и γ_2, то она представляет и $\gamma_1\gamma_2$.

4.24. Представляет ли нуль форма

$$f(x,y)=(1+\sin t)x^2+2(\operatorname{tg} t)xy+(\cos t)y^2$$

над кольцом $\mathbb{R}[[t]]$?

Линейные отображения и матрицы

4.25. Доказать линейность отображений

а) $I\colon C([0,1])\to\mathbb{R},\ \ I(f)=\int_0^1 f(x)\,dx$;

б) $j_m\colon C^m([0,1])\to\mathbb{R}^{m+1},\ \ j_m(f)=(f(1/2),f^{(1)}(1/2),\dots,f^{(m)}(1/2))$;

в) $T_a\colon C(\mathbb{R})\to C(\mathbb{R}),\ \ (T_af)(x)=f(x+a)$;

г) $D^2\colon C^m(\mathbb{R})\to C^{m-2}(\mathbb{R}),\ \ (D^2f)=f^{(2)}(x)$.

Найти размерности ядер и образов ограничений этих отображений на пространство P_n многочленов степени не выше n.

4.26. Пусть $S_1,\dots,S_{64}$ — все подмножества множества из шести элементов. Найти ранг матрицы A, элементы которой определены условиями

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } S_i\cap S_j\neq\emptyset,\\ 0, & \text{если } S_i\cap S_j=\emptyset.\end{cases}$$

4.27. *Коммутатором* матриц X,Y называется матрица $[X,Y]=XY-YX$. Доказать, что любая комплексная матрица со следом нуль может быть представлена в виде суммы коммутаторов матриц со следом нуль.

4.28. Пусть V,U,W — векторные пространства, A,B — линейные операторы:

$$V\xleftarrow{A}W\xrightarrow{B}U$$

Доказать, что оператор $C\colon V\to W$ такой, что $CA=B$ существует тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker}A\subset\operatorname{Ker}B$.

4.29. Доказать, что обратимые линейные отображения $g\colon V\to V$ пространства V над полем k образуют группу $GL(V)$, изоморфную матричной группе $GL(\dim V,k)$.

4.30. Доказать, что существует такой элемент $g \in GL(V)$, что

а) $gx = y$ для любых заданных ненулевых векторов $x, y \in V$;

б) $gX = Y$ для любых заданных d-мерных подпространств $X, Y \subset V$.

в) $gF_1 = F_2$ для любых заданных $(d_1, \dots, d_l)$-флагов F_1, F_2 в пространстве V ($(d_1, \dots, d_l)$-флагом в V называется набор вложенных подпространств $U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_l$ с $\dim U_i = d_i$).

4.31. Всегда ли можно, действуя невырожденным преобразованием g пространства V, перевести заданную пару векторов из V в другую заданную пару векторов? Тот же вопрос для пары (тройки) подпространств в V.

4.32. Доказать следующие достаточные условия обратимости линейного оператора:

а) если оператор A нильпотентен, то оператор $E + A$ обратим.

б) если существует такой многочлен $f(x)$, что $f(A) = 0$, а $f(0) \neq 0$, то оператор A обратим.

4.33. Получить явную формулу для n-ого числа Фибоначчи, пользуясь следующей схемой рассуждений.

а) Пусть $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ и $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Положим

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$F^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}.$$

б) Вычислив след и детерминант матрицы F, найти такие числа α и β, что

$$F = C \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} C^{-1}$$

для некоторой матрицы C. Далее найти саму матрицу C (она, разумеется, должна быть невырожденной).

в) Заметив, что

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} = F^n = C \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} C^{-1},$$

вывести, что

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

4.34. Доказать инвариантность подпространств $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Im} A$ относительно любого оператора B, перестановочного с A.

4.35. Найти все инвариантные подпространства оператора

а) с матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$;

б) $\frac{d}{dx}$ в пространстве P_n; в) $\frac{d^2}{dx^2}$ в пространстве P_n.

4.36. Найти собственные значения оператора с матрицей

а) $A^T A$, где $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$;

б) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & \ldots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_3 & a_4 & \ldots & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$.

4.37. Пусть $X \in Sp_n$. Доказать, что характеристический многочлен X возвратен.

4.38. Найти необходимые и достаточные условия диагонализируемости над $\mathbb{C}$ оператора с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & \ldots & a_2 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.39. Пусть $A, B \in SL(2, \mathbb{C})$. Тогда $\det[A, B] = 0$ в том и только том случае, когда A и B имеют общий собственный вектор.

4.40. Пусть оператор A в n-мерном пространстве имеет n различных собственных значений и $[A, B] = 0$. Доказать, что существует базис, в котором матрицы операторов A и B диагональны одновременно.

4.41. Пусть $\{ A_\alpha \mid \alpha \in I \}$ — некоторое семейство попарно перестановочных операторов в комплексном конечномерном пространстве. Доказать, что

а) существует вектор, являющийся собственным для каждого A_α;

б) если каждый оператор A_α диагонализируем, то существует такой базис, в котором все A_α одновременно имеют диагональные матрицы.

4.42. Найти собственные значения оператора $\frac{d}{dx}$ в пространствах $\mathbb{C}[[x]]$, $\mathbb{C}[x]$.

4.43. Найти все линейные операторы в пространстве размерности $n \geqslant 2$, матрицы которых одинаковы в любом базисе.

4.44. Найти корневые подпространства оператора

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

4.45. Найти жорданову нормальную форму матриц

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;

в) матрицы A^{-1}, если известна жорданова нормальная форма A;

г) матрицы $\alpha E + J^2$, где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

4.46. Найти жорданову нормальную форму и жорданов базис для матриц

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 2 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4.47. а) Пусть жорданова нормальная форма оператора A есть одна жорданова клетка. Доказать, что тогда централизатор A совпадает с $\mathbb{C}[A]$.

б) Пусть степень минимального многочлена оператора A равна размерности пространства. Доказать, что и в этом случае централизатор A совпадает с $\mathbb{C}[A]$.

в) Доказать, что централизатор матрицы порядка n является векторным пространством размерности не меньшей n.

г) Доказать, что не существует более чем $[n^2/2]+1$ линейно независимых матриц, перестановочных между собой.

4.48. Доказать, что если для операторов A, B в конечномерном векторном пространстве выполняется соотношение $[A, B] = B$, то оператор B нильпотентен.

4.49. Доказать, что любая квадратная матрица с элементами из произвольного коммутативного кольца с единицей аннулируется своим характеристическим многочленом.

4.50. Существует ли такое дробно-линейное преобразование A, $Az = \frac{az+b}{cz+d}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$ есть сдвиг $z \mapsto z+1$?

4.51. Существует ли такая вещественная матрица A, что

$$\exp A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,?$$

4.52. На окружности отмечено n точек; пусть V — пространство комплекснозначных функций на множестве этих точек. Оператор $A\colon V \to V$ ставит в соответствие функции f функцию Af, значение которой в некоторой точке равно полусумме значений функции f в двух соседних точках.

а) Найти собственные значения оператора A.

б) При каких n у оператора A нуль является собственным значением? Указать соответствующую собственную функцию.

в) Найти $\lim\limits_{m\to\infty} A^m$.

4.53. Матрица называется вполне положительной, если положительны все ее миноры любых порядков. Пусть A есть трехдиагональная матрица, под- и наддиагональные элементы которой положительны. Доказать, что матрица $\exp A$ вполне положительна.

4.54. Доказать, что всякий автоморфизм аддитивной группы вещественного векторного пространства размерности не меньше 2, сохраняющий коллинеарность векторов, является (невырожденным) линейным преобразованием.

4.55. Пусть A — целочисленная $n\times n$-матрица с определителем ± 1, порядок которой в группе невырожденных матриц равен p^k, где p — простое число. Доказать, что $p^{k-1}(p-1) \leqslant n$.

Тензоры

4.56. Доказать, что $V^{\otimes 2} \cong S^2V \oplus \bigwedge^2 V$. Верно ли, что $V^{\otimes 3} \cong S^3V \oplus \bigwedge^3 V$?

4.57. Найти $(S^2V)^0$, $(\bigwedge^2 V)^0$.

4.58. Построить канонический изоморфизм пространств

а) $\bigwedge^k V$ и $\bigwedge^n V \otimes \bigwedge^{n-k} V^*$ (если $\dim V = n$);

б) $\bigwedge^k (V\otimes F)$ и $F^{\otimes k} \otimes \bigwedge^k V$ (если $\dim F = 1$).

4.59. Найти сигнатуру квадратичной формы $q(\omega)$ на $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$, определенной формулой $\omega \wedge \omega = q(\omega) e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$, где $\{e_i\}$ — стандартный базис пространства $\mathbb{R}^4$.

4.60. Верно ли, что минимальный многочлен оператора $A \otimes B$ есть произведение минимальных многочленов операторов A и B?

4.61. Пусть симметрические матрицы A и B положительно определены. Доказать, что матрица C с $c_{ij} = a_{ij} b_{ij}$ также положительно определена.

4.62. а) Найти $\operatorname{tr} A^{\otimes k}$, $\det A^{\otimes k}$.

б) Вычислить $\det(\bigwedge^2 (S^2 A))$, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.63. а) Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис пространства V; $\{\, e_I = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \mid I \,\}$ — базис пространства $\bigwedge^k V$. Найти матрицу оператора $\bigwedge^k A$ в указанном базисе.

б) Найти $\operatorname{tr} \bigwedge^k A$.

в) Доказать формулу Бине – Коши:

$$|(AB)_I^J| = \sum_K |A_I^K| |B_K^J|,$$

где A_I^J есть подматрица матрицы A с номерами строк $i_1, \ldots, i_k$ и номерами столбцов $j_1, \ldots, j_k$, $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$, $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$

г) Доказать, что коэффициент c_k характеристического многочлена $\chi_A(t) = \det(tE - A) = t^n - c_1 t^{n-1} + \cdots + (-1)^n c_n$ матрицы A есть сумма главных миноров размера $k \times k$ этой матрицы.

4.64. Доказать, что над полем характеристики нуль равенство $\operatorname{tr} \bigwedge^k A = 0$ для всех k влечет нильпотентность оператора A.

4.65. Вычислить $\frac{d}{dt}(\bigwedge^k A(t) v_1 \wedge \cdots \wedge v_k)$.

4.66. Доказать, что подпространство $U \subset V$ размерности k инвариантно относительно оператора A тогда и только тогда, когда $\bigwedge^k U$ инвариантно относительно $\bigwedge^k A$.

4.67. Найти жорданову нормальную форму оператора $\bigwedge^2 A$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.68. Найти наибольшее собственное значение линейного оператора $X \mapsto AXA^t$ в пространстве вещественных кососимметрических матриц порядка 3, если собственные значения матрицы A суть $1, 2, 3$.

4.69. Найти центр алгебры $\bigwedge^{\cdot} V$.

4.70. (Квадрика Плюккера.) Пусть V — четырехмерное пространство, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ — некоторый его базис, $\mathrm{Gr}(2, V)$ — множество всех двумерных подпространств в V. Пусть подпространство $U \in \mathrm{Gr}(2, V)$ задано своим базисом $\{u_1, u_2\}$. Коэффициенты p_{ij} в разложении

$$u_1 \wedge u_2 = \sum_{i<j} p_{ij} e_i \wedge e_j$$

называют плюккеровыми координатами подпространства U.

а) Проверить, что при замене базиса в U все числа p_{ij} умножаются на детерминант матрицы замены. Поэтому корректно определено отображение $p\colon\ \mathrm{Gr}(2, V) \to \mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$.

б) Убедиться в том, что образ отображения p есть в точности проективизация множества разложимых бивекторов из $\bigwedge^2 V$.

в) Доказать, что разложимость бивектора $\omega \in \bigwedge^2 V$ равносильна условию $\omega \wedge \omega = 0$.

г) Условие п. в) в координатах записывается как

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Это уравнение квадрики в $\mathbb{P}^5$, называемой квадрикой Плюккера.

д) Могут ли числа $1, 2, 3, 4, 5, 6$ быть минорами порядка 2 некоторой матрицы размера 2×4?

4.71. Пусть $0 \neq v \in V$. Рассмотрим последовательность отображений

$$0 \to \bigwedge^0 V \xrightarrow{\varphi_0} \bigwedge^1 V \xrightarrow{\varphi_1} \bigwedge^2 V \xrightarrow{\varphi_2} \bigwedge^3 V \dots,$$

где $\varphi_0(\alpha) = \alpha v,\ \ \varphi_i(\omega) = v \wedge \omega$ при $i > 0$. Доказать, что

а) $\varphi_{i+1} \circ \varphi_i = 0$,

б) $\mathrm{Ker}\,\varphi_{i+1} = \mathrm{Im}\,\varphi_i$.

5. Векторные пространства с дополнительными структурами

5.1. Приведите нетривиальный пример ортогонального оператора в пространстве многочленов степени не выше трех со скалярным произ-