4.68. Найти наибольшее собственное значение линейного оператора $X \mapsto AXA^t$ в пространстве вещественных кососимметрических матриц порядка 3, если собственные значения матрицы A суть $1, 2, 3$.

4.69. Найти центр алгебры $\bigwedge^{\cdot} V$.

4.70. (Квадрика Плюккера.) Пусть V — четырехмерное пространство, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ — некоторый его базис, $\mathrm{Gr}(2, V)$ — множество всех двумерных подпространств в V. Пусть подпространство $U \in \mathrm{Gr}(2, V)$ задано своим базисом $\{u_1, u_2\}$. Коэффициенты p_{ij} в разложении

$$u_1 \wedge u_2 = \sum_{i<j} p_{ij} e_i \wedge e_j$$

называют плюккеровыми координатами подпространства U.

а) Проверить, что при замене базиса в U все числа p_{ij} умножаются на детерминант матрицы замены. Поэтому корректно определено отображение $p\colon\ \mathrm{Gr}(2, V) \to \mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$.

б) Убедиться в том, что образ отображения p есть в точности проективизация множества разложимых бивекторов из $\bigwedge^2 V$.

в) Доказать, что разложимость бивектора $\omega \in \bigwedge^2 V$ равносильна условию $\omega \wedge \omega = 0$.

г) Условие п. в) в координатах записывается как

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Это уравнение квадрики в $\mathbb{P}^5$, называемой квадрикой Плюккера.

д) Могут ли числа $1, 2, 3, 4, 5, 6$ быть минорами порядка 2 некоторой матрицы размера 2×4?

4.71. Пусть $0 \neq v \in V$. Рассмотрим последовательность отображений

$$0 \to \bigwedge^0 V \xrightarrow{\varphi_0} \bigwedge^1 V \xrightarrow{\varphi_1} \bigwedge^2 V \xrightarrow{\varphi_2} \bigwedge^3 V \dots,$$

где $\varphi_0(\alpha) = \alpha v$, $\varphi_i(\omega) = v \wedge \omega$ при $i > 0$. Доказать, что

а) $\varphi_{i+1} \circ \varphi_i = 0$,

б) $\mathrm{Ker}\, \varphi_{i+1} = \mathrm{Im}\, \varphi_i$.

5. Векторные пространства с дополнительными структурами

5.1. Приведите нетривиальный пример ортогонального оператора в пространстве многочленов степени не выше трех со скалярным произведением

$$(f(x), g(x)) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

5.2. (Эпиморфизм $SU_2 \to SO_3$.)

а) Любой элемент из группы SO_3 есть вращение l_φ вокруг некоторой оси l на некоторый угол φ.

б) Зафиксируем в $\mathbb{R}^3$ ортонормированный репер $Oxyz$. Тогда любое вращение l_φ есть композиция $Z_\gamma X_\beta Z_\alpha$ вращений на углы α, β, γ вокруг осей Oz, Ox, Oz соответственно (теорема Эйлера).

в) Эрмитовы матрицы со следом нуль образуют трехмерное векторное пространство V над $\mathbb{R}$. Форма $(X, Y) = \operatorname{tr} XY$ задает на нем структуру евклидова пространства. Матрицы Паули

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

образуют ортогональный базис в V.

г) Для любого элемента $u \in U_2$ определено отображение $R_u : V \to V$, при котором $R_u(X) = uXu^{-1}$. Доказать, что R_u — ортогональный оператор; соответствие $u \mapsto R_u$ задает гомоморфизм $R \colon U_2 \to O_3$.

д) Пусть

$$u_\varphi = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}, \quad v_\psi = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\psi} \\ e^{-i\psi} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $R_{u_{\varphi/2}} = X_\varphi$, $R_{v_{\psi/2}} = Z_\psi$. Заключить отсюда, что при гомоморфизме R каждый элемент из SO_3 имеет прообраз из SU_2.

е) Показать, что при гомоморфизме R группа SU_2 отображается в точности на SO_3.

5.3. В пространстве бесконечно дифференцируемых вещественнозначных периодических с периодом 2π функций на прямой со скалярным умножением

$$(f(x), g(x)) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

действует оператор вида

$$L \colon f(x) \mapsto u_0(x)f(x) + u_1(x)f'(x) + u_2(x)f''(x),$$

где $u_0(x), u_1(x), u_2(x)$ — функции из указанного пространства. Найти необходимые и достаточные условия самосопряженности оператора L.

5.4. Существуют ли три вектора в трехмерном евклидовом пространстве, матрица Грама которых имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & c \\ 2 & c & 5 \end{pmatrix},$$

где а) $c = 0$, б) $c = 2$, в) $c = 1$?

Геометрия

5.5. Найти пересечение прямой $\langle(-1, 2, -2, 5)\rangle$ с выпуклой оболочкой множества точек

$$(x, x^2, x^3, x^4),$$

$x = 0, \pm 1, \pm 2$ в пространстве $\mathbb{R}^4$.

5.6. Найти предел при $n \to \infty$ длины ребра правильного симплекса, вписанного в сферу радиуса 1 в n-мерном евклидовом пространстве.

5.7. Доказать, что всякий пятигранный выпуклый конус в трехмерном евклидовом пространстве можно линейным преобразованием привести к такому виду, чтобы каждое ребро было перпендикулярно противоположной грани.

5.8. В каких случаях произведение двух винтовых движений трехмерного евклидова пространства является параллельным переносом?

5.9. Считая известной классификацию движений трехмерного евклидова пространства, нарисовать блок-схему для определения типа движения, заданного в виде $x \mapsto Ax + b$, где A — ортогональная матрица, а b — некоторый вектор. Указать, как при этом вычисляются параметры движения (ось, угол и шаг винта — для винтового движения, плоскость симметрии и вектор переноса — для скользящей симметрии и плоскость симметрии, ось и угол поворота — для зеркального поворота).

5.10. Определить тип движения

а) $x \mapsto \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

б) $x \mapsto \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 6 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, в) $x \mapsto \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix}$,

г) $x \mapsto \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5.11. Пусть A и B — движения трехмерного евклидова пространства, удовлетворяющие условиям

$$A^3B^3 = (AB)^2 = \mathrm{id}\,.$$

Доказать, что A и B имеют общую инвариантную прямую.

5.12. Найти число прямых, скрещивающихся с данной прямой в аффинном пространстве над полем $\mathbb{F}_p$.

5.13. Какое наибольшее число сторон может иметь сечение