6. Кольца и модули

6.1. Будет ли нетеровым кольцо степенных рядов от z

а) с бесконечным радиусом сходимости,

б) с конечным радиусом сходимости (своим для каждого ряда)?

6.2. Будет ли нетеровым

а) кольцо многочленов от z, у которых первые k производных обращаются в нуль при $z = 0$,

б) кольцо многочленов от z, w, все частные производные которых по w обращаются в нуль при $z = 0$,

в) кольцо рациональных функций от z, не имеющих полюсов на окружности $|z| = 1$?

6.3. Есть ли делители нуля в алгебре функций, аналитических в данной области $\Omega \subset \mathbb{C}$? (Под *областью* понимается открытое связное множество.)

6.4. Пусть A — нетерово кольцо, $I \subset A$ — идеал. Доказать, что кольцо A/I нетерово.

6.5. Пусть $I \subset A$ — идеал, M — некоторый A-модуль. Доказать, что

$$A/I \otimes_A M \cong M/IM.$$

6.6. Доказать «китайскую теорему об остатках»: если $\{I_k\}$ — семейство идеалов в коммутативном кольце A, причем $I_k + I_l = A$ для любых $k \neq l$, то

а) $\bigcap I_k = \prod I_k$,

б) $A/\bigcap I_k = \bigoplus A/I_k$.

6.7. Пусть $A \subset B$ — области целостности и пусть B цело над A. Доказать, что B — поле тогда и только тогда, когда A — поле.

6.8. Пусть A — нетерова область целостности, K — ее поле частных, S — *мультипликативное подмножество*, т.е. такое подмножество в A, что $1 \in S$, $0 \notin S$ и вместе с любыми элементами из S их произведение также содержится в S. Пусть

$$A_S = \left\{ \frac{a}{b} \in K \;\middle|\; b \text{ есть произведение элементов из } S \right\}$$

есть *локализация* кольца A по S. Доказать, что кольцо A_S нетерово.

6.9. Пусть S — мультипликативное подмножество в кольце A, A_S — соответствующая локализация. Доказать, что для нетерова A-модуля M имеется изоморфизм $M_S \cong M \otimes A_S$.

6.10. Пусть S — мультипликативное подмножество кольца A, M — конечно порожденный A-модуль, A_S — локализация A. Доказать, что $M_S = 0$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $s \in S$, что $sM = 0$.

6.11. Пусть A — нетерово кольцо и $f = \sum a_n x^n \in A[[x]]$ — элемент кольца формальных степенных рядов. Доказать, что если элемент f нильпотентен в $A[[x]]$, то все коэффициенты a_n суть нильпотентные элементы в A. (Обратное тоже верно, но доказывается совсем просто.)

6.12. Обозначим через $\mathbb{Z}_S$ кольцо рациональных чисел, знаменатели которых не делятся на простые числа из заданного множества S. Доказать, что

а) кольцами вида $\mathbb{Z}_S$ исчерпываются все подкольца с единицей в $\mathbb{Q}$,

б) $\mathbb{Z}_S \otimes \mathbb{Z}_{S'} \cong \mathbb{Z}_{S \cap S'}$.

6.13. Пусть S — некоторое множество простых чисел,

$$(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_S = (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_S.$$

Доказать, что

$$(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_S = \begin{cases} 0, & \text{если } p \notin S, \\ \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, & \text{если } p \in S. \end{cases}$$

6.14. Доказать, что

$$G \otimes \mathbb{Z}_S \cong (\mathbb{Z}^{\operatorname{rk} G}) \oplus (S\text{-кручение группы } G)$$

для любой конечно порожденной абелевой группы G. (Элемент группы G называется *элементом S-кручения*, если его порядок есть произведение простых чисел, принадлежащих множеству S.)

6.15. Пусть $f\colon A \to U$ и $g\colon B \to V$ — сюръективные гомоморфизмы R-модулей. Доказать, что

$$\operatorname{Ker} f \otimes g = \operatorname{Ker} f \otimes B + A \otimes \operatorname{Ker} g.$$

6.16. Существует ли такой нетривиальный $\mathbb{Z}$-модуль M, что $M \otimes_{\mathbb{Z}} M = 0$?

7. Абелевы группы

7.1. Являются ли конечно порожденными группы по сложению вещественных и рациональных чисел?

7.2. Верно ли, что подгруппа конечно порожденной абелевой группы конечно порождена?