6.10. Пусть S — мультипликативное подмножество кольца A, M — конечно порожденный A-модуль, A_S — локализация A. Доказать, что $M_S = 0$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $s \in S$, что $sM = 0$.

6.11. Пусть A — нетерово кольцо и $f = \sum a_n x^n \in A[[x]]$ — элемент кольца формальных степенных рядов. Доказать, что если элемент f нильпотентен в $A[[x]]$, то все коэффициенты a_n суть нильпотентные элементы в A. (Обратное тоже верно, но доказывается совсем просто.)

6.12. Обозначим через $\mathbb{Z}_S$ кольцо рациональных чисел, знаменатели которых не делятся на простые числа из заданного множества S. Доказать, что

а) кольцами вида $\mathbb{Z}_S$ исчерпываются все подкольца с единицей в $\mathbb{Q}$,

б) $\mathbb{Z}_S \otimes \mathbb{Z}_{S'} \cong \mathbb{Z}_{S \cap S'}$.

6.13. Пусть S — некоторое множество простых чисел,

$$(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_S = (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_S.$$

Доказать, что

$$(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_S = \begin{cases} 0, & \text{если } p \notin S, \\ \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, & \text{если } p \in S. \end{cases}$$

6.14. Доказать, что

$$G \otimes \mathbb{Z}_S \cong (\mathbb{Z}^{\operatorname{rk} G}) \oplus (S\text{-кручение группы } G)$$

для любой конечно порожденной абелевой группы G. (Элемент группы G называется *элементом S-кручения*, если его порядок есть произведение простых чисел, принадлежащих множеству S.)

6.15. Пусть $f\colon A \to U$ и $g\colon B \to V$ — сюръективные гомоморфизмы R-модулей. Доказать, что

$$\operatorname{Ker} f \otimes g = \operatorname{Ker} f \otimes B + A \otimes \operatorname{Ker} g.$$

6.16. Существует ли такой нетривиальный $\mathbb{Z}$-модуль M, что $M \otimes_{\mathbb{Z}} M = 0$?

7. Абелевы группы

7.1. Являются ли конечно порожденными группы по сложению вещественных и рациональных чисел?

7.2. Верно ли, что подгруппа конечно порожденной абелевой группы конечно порождена?

7.3. Разлагаются ли в нетривиальную прямую сумму группы рациональных чисел по сложению, по умножению (разумеется, в последнем случае нуль исключен)?

7.4. Пусть G — аддитивная абелева группа, $a \in G$, $(\operatorname{ord} a, n) = 1$. Доказать, что уравнение $nx = a$ разрешимо в группе G.

7.5. Сколько существует неизоморфных абелевых групп порядка $2^{10} \cdot 5^3$?

7.6. Сколько элементов

а) порядка 4 в группах Z_{36}, Z_{1728},

б) порядка 6 в группах $Z_3 \oplus Z_{26}$, $Z_{12} \oplus Z_4$,

в) порядка p^s в примарной группе $Z_{p^{n_1}} \oplus \dots \oplus Z_{p^{n_k}}$?

7.7. Доказать, что кольцо эндоморфизмов конечной абелевой группы коммутативно тогда и только тогда, когда эта группа является циклической.

7.8. Конечная абелева группа является циклической тогда и только тогда, когда каждая ее p-компонента — циклическая группа.

7.9. Аддитивная абелева группа G делима тогда и только тогда, когда уравнение $px = a$ разрешимо в группе G для любого элемента a и любого простого числа p.

7.10. Найти примарное разложение группы $\mathbb{Z}^3/R\mathbb{Z}^3$, где

$$R = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 5 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

7.11. Пусть

$$L_m = \{(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid m \mid (x_1 + \dots + x_n)\}.$$

Найти индекс $[\mathbb{Z}^n : L_m]$.

7.12. Найти факторгруппу $\mathbb{Z}^n/B\mathbb{Z}^n$, если $B \in SL(n, \mathbb{Z})$.

7.13. Пусть $B \in \operatorname{Mat}(n, \mathbb{Z})$ и $G = \mathbb{Z}^n/B\mathbb{Z}^n = G_{\text{free}} \oplus G_{\text{tors}}$. Доказать, что если $\det B \neq 0$, то $G_{\text{free}} = 0$. Верно ли, что если $\det B = 0$, то $\operatorname{rk} G_{\text{tors}} = n - \operatorname{rk} B$?