8. Алгебры

8.1. Вычислить ряды Пуанкаре

$$P_A(t) = \sum_k (\dim A_k) t^k$$

градуированных алгебр

$$k\langle x, y\rangle/(x^2 - xy - yx),$$

$$k\langle x, y\rangle/(x^2),$$

где $k\langle x, y\rangle$ — свободная ассоциативная алгебра, порожденная x, y.

8.2. Пусть T — центральная конечномерная алгебра с делением над полем k и P — ее максимальное подполе. Тогда

$$[T : k] = [P : k]^2.$$

8.3. Пусть $Z(A)$ — центр алгебры A. Доказать, что

$$Z(A \otimes B) = Z(A) \otimes Z(B).$$

8.4. Пусть L — некоторое поле, $\phi\colon L \to L$ — его автоморфизм, $\mathcal{L}$ — алгебра конечных влево рядов Лорана $\sum_{i=-M}^{\infty} a_i t^i$, $a_i \in L$ с обычной операцией сложения и умножением по правилам

$$ta = \phi(a)t, \quad a\sum a_i t^i = \sum (aa_i) t^i.$$

Доказать, что $\mathcal{L}$ — тело.

8.5. Если алгебра $K[x]/(f(x))$ полупроста, то многочлен $f(x)$ не имеет кратных неприводимых множителей.

8.6. Если A — центральная простая алгебра над полем k и $\dim_k A = 4$, то либо $A \cong M_2(k)$, либо A есть алгебра с делением.

8.7. Пусть L — конечное расширение поля k. Доказать эквивалентность следующих условий:

1) алгебра $L \otimes L$ является полупростой,

2) всякий элемент поля L сепарабелен над k;

3) алгебра $A \otimes L$ полупроста для любой полупростой коммутативной k-алгебры A.

8.8. Пусть A — полупростая алгебра над полем k ($\operatorname{char} k \neq 2$) и $[A : k] = 2$. Доказать, что либо $A \cong k \times k$, либо A — квадратичное расширение поля k.

8.9. Доказать, что если K есть $\mathbb{Q}$-алгебра и $K \otimes \mathbb{R}$ — алгебра с делением, то для K есть только три возможности:

$$K \cong \mathbb{Q},$$
$$K \cong \mathbb{Q}(\sqrt{m}), \quad m \in \mathbb{Q},\ m < 0,$$
$$K \cong D_{\mathbb{Q}}(a, b), \quad a, b \in \mathbb{Q},\ a < 0,\ b < 0.$$

($D_{\mathbb{Q}}(a, b)$ — алгебра кватернионов с образующими i, j и соотношениями $i^2 = a,\ \ j^2 = b,\ \ ij = -ji$.)

8.10. Если A и B — две конечно порожденные алгебры без делителей нуля над алгебраически замкнутым полем, то их тензорное произведение $A \otimes B$ является алгеброй без делителей нуля.

8.11. Пусть A — алгебра над полем k с базисом $\{e_1, e_2, u\}$ и таблицей умножения

	e_1	e_2	u
e_1	e_1	0	u
e_2	0	e_2	0
u	0	u	u

Доказать ассоциативность этой алгебры. Найти $\operatorname{rad} A$, $A/\operatorname{rad} A$.

8.12. Пусть A — не нильпотентная ассоциативная алгебра. Доказать, что в ней имеется ненулевой идемпотент.

8.13. Алгебра Вейля A_n над полем k определяется образующими $x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n$ и соотношениями

$$x_i x_j = x_j x_i, \quad \partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i,$$
$$\partial_i x_i - x_i \partial_i = 1, \quad \partial_j x_i = x_i \partial_j \text{ при } i \neq j.$$

Докажите, что

а) Алгебра A_n изоморфна алгебре дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами на аффинной плоскости $\mathbb{A}^n$, если поле k имеет характеристику нуль.

б) Алгебра A_n проста, если $\operatorname{char} k = 0$. Что будет, если характеристика поля является простым числом?

в) Алгебра A_n нетерова справа и слева.

г) Алгебра A_n является кольцом Оре.

д) Каждый собственный левый идеал алгебры A_n порождается двумя элементами (теорема Стаффорда).

8.14. Пусть G — конечная группа, $H = kG$ — ее групповая алгебра. Доказать, что отображение $\Delta\colon g \mapsto g \otimes g$ продолжается до гомоморфизма алгебр $\Delta\colon H \to H \otimes H$ (он называется коумножением). Доказать коммутативность диаграмм

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & H \otimes H \arrow[d, "\Delta\otimes 1"] \\ H \otimes H \arrow[r, "1\otimes\Delta"] & H \otimes H \otimes H \end{tikzcd}$$

(она называется аксиомой коассоциативности) и

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[rr, shift left, "1\otimes S"] \arrow[rr, shift right, "S\otimes 1"'] & & H \otimes H \arrow[d, "m"] \\ H \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "\varepsilon"] & k \arrow[r, "\eta"] & H \end{tikzcd}$$

где m — умножение в H, $\varepsilon(g) = 1$ — коединица (на всю алгебру H это отображение продолжается по линейности), $\eta(\alpha) = \alpha e$ — единица, $S(g) = g^{-1}$ (последнее отображение называется антиподом, а последняя диаграмма — аксиомой антипода). Записать аксиому единицы в группе в терминах коммутативности некоторой диаграммы.

8.15. Пусть G есть алгебраическая группа и $H = k[G]$ — алгебра регулярных функций на ней. Доказать, что отображение $\Delta\colon H \to H \otimes H$ при котором $(\Delta f)(x, y) = f(xy)$, будет коассоциативным коумножением. Если положить далее $\varepsilon(f) = f(e)$, $\eta(\alpha) = \alpha.1$, $S(f)(g) = f(g^{-1})$, то выполняется аксиома антипода.

8.16. Доказать, что для конечной группы G алгебры kG и $k[G]$ двойственны друг другу как алгебры Хопфа, т. е. существует невырожденное спаривание между векторными пространствами kG и $k[G]$, относительно которого оператор умножения в одной алгебре сопряжен коумножению в другой.

8.17. Выписать явные формулы для коумножения и антипода в случае $G = GL_n$, $G = SL_n$.

8.18. Доказать, что универсальная обертывающая $U\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ будет алгеброй Хопфа, если для $x \in \mathfrak{g}$ положить $\Delta x = 1 \otimes x + x \otimes 1$, $\varepsilon x = 0$ и $Sx = -x$.