# 9. Гомологическая алгебра

**9.1.** Доказать, что если строка

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

точна, то $A \cong B$.

**9.2.** (Лемма о пяти гомоморфизмах.) Пусть в нижеследующей коммутативной диаграмме строки точны, а все вертикальные стрелки, кроме средней, являются изоморфизмами:

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5 \end{array}$$

Доказать, что и средняя вертикальная стрелка — изоморфизм. Это утверждение верно и при более слабых условиях на вертикальные стрелки. При каких?

**9.3.** В коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc} & & D_1 & \longrightarrow & D_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & C_3 \end{array}$$

точны строки, а также левый и правый столбцы. Будет ли точен средний столбец?

**9.4.** (Лемма о змее.) В коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc} & & A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 \longrightarrow 0 \\ & & {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow \\ 0 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 \end{array}$$

строки точны. Доказать, что существует такой гомоморфизм $\delta\colon \operatorname{Ker} h \to \operatorname{Coker} f$, что последовательность

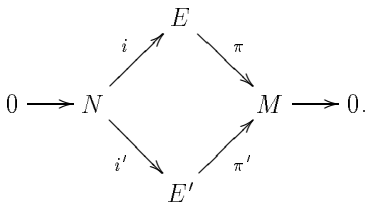
$$\operatorname{Ker} f \longrightarrow \operatorname{Ker} g \longrightarrow \operatorname{Ker} h \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} f \longrightarrow \operatorname{Coker} g \longrightarrow \operatorname{Coker} h$$

точна.

**9.5.** (Сложение Бэра.) Расширением модуля $M$ с помощью модуля $N$ (в фиксированной категории модулей) называется точная последовательность

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0 \ .$$

Расширения $(E, i, \pi)$ и $(E', i', \pi')$ называются изоморфными, если существует изоморфизм модулей $E \to E'$, делающий коммутативной диаграмму




Суммой расширений $(E, i, \pi)$ и $(E', i', \pi')$ называется последовательность

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\tilde{i}} E \,\square\, E' \xrightarrow{\tilde{\pi}} M \longrightarrow 0 \ ,$$

в которой $E \,\square\, E' = B/D$, где

$$B = \{\, (e, e') \in E \oplus E' \mid \pi(e) = \pi'(e') \,\},$$
$$D = \{\, (e, e') \in B \mid \exists n \in N : e = -i(n),\ e' = i'(n) \,\},$$
$$\tilde{i}(n) = (i(n), 0) + D = (0, i'(n)) + D,$$
$$\tilde{\pi}((e, e') + D) = \pi(e) = \pi'(e').$$

Доказать, что эта операция превращает множество $\mathrm{Ext}^1(M, N)$ классов изоморфных расширений в абелеву группу, нулем которой служит тривиальное расширение

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i_1} N \oplus M \xrightarrow{p_2} M \longrightarrow 0 \ ,$$

где $i_1$ и $p_2$ — очевидные вложение и проекция.

**9.6.** Вычислить $\mathrm{Ext}^1(Z_p, Z_p)$ в категории абелевых групп ($p$ — простое число).

**9.7.** Доказать, что кольца Гротендика категорий представлений $\mathbf{Rep}_{\mathbb{C}} Q_8$ и $\mathbf{Rep}_{\mathbb{C}} D_4$ изоморфны.