27 июня 2000 года
(летний экзамен 2000 года)

1. Две окружности касаются прямой в точках A и B. Третья окружность касается той же прямой, а также первых двух окружностей в точках C и D. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

2. Найдите $\text{НОК}(1, 2, \ldots, 99)/\text{НОК}(2, 4, 6, \ldots, 200)$.

3. Блоха прыгает по координатной плоскости. Первый прыжок она делает из точки $(0; 0)$ в точку $(1; 0)$. Каждый следующий прыжок блохи в 2 раза короче предыдущего и образует с направлением предыдущего прыжка угол в 60° против часовой стрелки. В какую точку прискачет блоха к концу времен?

4. На какую цифру заканчивается число C_{125}^{25} (количество 25-элементных подмножеств множества из 125 элементов)?

5. При каких a и n многочлен $x^n - ax + 1$ имеет кратный вещественный корень (число a вещественное, число n натуральное)?

6. Найдите какой-нибудь многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число $\sqrt{\sqrt{5}-1} + \sqrt{\sqrt{5}+1}$.

7. Разрешается поменять местами концы диагоналей любой грани куба. Сколько различных перестановок вершин можно получить композициями таких преобразований?

8. В вершинах куба расставлены действительные числа таким образом, что суммы чисел, стоящих в вершинах каждой из граней, равны одному и тому же числу. Найти размерность векторного пространства таких расстановок.

9. Обозначим через x_n корень уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x-k} = 0,$$

принадлежащий $(0; 1)$.

а) Докажите, что последовательность x_n сходится.

б*) Найдите ее предел.

10*. Множество действительных чисел покрыто интервалами. Точки, покрытые конечным количеством интервалов, покрашены в черный цвет, остальные — в белый.

а) Может ли так случиться, что все рациональные числа покрашены в белый цвет, а все иррациональные — в черный?

б) А наоборот?

11*. Найдите $\min(x^2 + y^2 + z^2)$ при условии $1 + 2xyz = x^2 + y^2 + z^2$.