Независимый московский университет
Высший колледж математики
Вступительный экзамен 2 сентября 2001 года

1. Два зеркала образуют двугранный угол величиной 3°. Сколько раз отразится в этих зеркалах луч света, параллельный одному из зеркал и перпендикулярный ребру двугранного угла?

2. Три плоских угла при вершине треугольной пирамиды прямые. Докажите, что сумма квадратов площадей трех граней этой пирамиды равна квадрату площади четвертой грани.

3. На координатную плоскость нанесены всевозможные точки с координатами (m, n), где m — натуральное число, n — количество цифр в десятичной записи числа 2^m. Докажите, что существуют такие две параллельные прямые, находящиеся на расстоянии 1 одна от другой, что все эти точки расположены в полосе между прямыми.

4. Многочлен имеет вид $f = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)$ (a_i — не обязательно различные действительные числа). Кроме того, для некоторого действительного a выполнено тождество $f(x^2) = f(x)f(x+a)$. Найдите a, при которых это возможно; опишите для них соответствующие f.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписанный. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABC и ACD, равна сумме радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABD и CBD.