Независимый Московский Университет

Высший Колледж Математики

Вступительный экзамен по программе «Матшкольник»
26 июня 2001 года

1. Разрешается переходить от числа к обратному, а также вычитать или добавлять единицу. Докажите, что такими операциями из любого рационального числа можно получить любое другое рациональное число.

2. На окружности выбрана точка P_1; ее соединяют с точкой P_2 на окружности, отстоящей от точки P_1 на $78°$ по часовой стрелке, точку P_2 — с точкой P_3 на окружности, отстоящей от P_2 на $78°$ по часовой стрелке, и так далее, пока ломаная не замкнется. Сколько у этой ломаной будет точек самопересечения?

3. Найти (какое-нибудь) натуральное число n, обладающее тем свойством, что

$$\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}<10^{-9}.$$

4. На комплексной плоскости дана окружность $|z-i|=r$. При каких r ее образ при действии отображения $z\mapsto z^2$ имеет самопересечения?

5. Семь человек должны унести семь одинаковых тюков. Каждый может нести не больше двух тюков. Сколькими способами можно распределить поклажу между людьми?

6. Функция f сопоставляет числу $x\in(0;1)$ такое число y, что десятичная запись x совпадает с одиннадцатеричной записью y (при десятичной записи числа x нельзя пользоваться периодическими дробями с периодом, состоящим из одних девяток). Верно ли, что функция f непрерывна?

7. Может ли композиция параллельных проектирований быть поворотом? Другими словами, можно ли задать в пространстве последовательность (не обязательно параллельных) плоскостей $P_1, P_2, \ldots, P_n = P_1$ и параллельных проекций $\pi_i\colon P_i\to P_{i+1}$, чтобы композиция $\pi_{n-1}\circ\pi_{n-2}\circ\dots\circ\pi_1\colon P_1\to P_1$ являлась нетождественным поворотом?

8. Катер, движущийся с постоянной скоростью и курсом (азимутом), прибыл за сутки из точки с широтой и долготой $0°$ в точку с координатами $10°$ южной широты и $10°$ западной долготы. Каковы будут координаты катера еще через сутки?

Ответ достаточно дать с точностью 10%; при вычислениях можно пользоваться приведенной ниже таблицей.

α	$5°$	$10°$	$15°$	$20°$	$25°$	$30°$	$35°$	$40°$	$45°$
$\sin\alpha$	0.087	0.174	0.259	0.342	0.423	0.500	0.574	0.643	0.707
$\cos\alpha$	0.996	0.985	0.966	0.940	0.906	0.866	0.819	0.766	0.707