Независимый Московский Университет
Высший Колледж Математики

Вступительный экзамен 8 сентября 2002 года

1. Докажите, что существует выпуклый 20-угольник, никакие три диагонали которого не проходят через одну точку (вершины исключаются).

2. (Продолжение) На окружности отмечено 160000 различных точек. Докажите, что среди отмеченных точек найдутся вершины 20-угольника, удовлетворяющего условию задачи 1.

3. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c выполняется неравенство
$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2.$$

4. Для каждой точки плоскости (a, b) укажите, сколько есть различных кратчайших путей между диаметрально противоположными вершинами прямоугольного параллелепипеда с длинами ребер $a, b, 1$, проходящих по поверхности этого параллелепипеда.

5. Оси двух бесконечных цилиндров радиуса R пересекаются под углом $\alpha > 0$. Найдите объем пересечения внутренностей этих цилиндров.