Независимый Московский Университет

Высший Колледж Математики

Вступительный экзамен по программе «Матшкольник»
30 июня 2002 года

1. В момент времени $t = 0$ точки A и B плоскости находятся на расстоянии 20 и начинают двигаться равномерно и прямолинейно со скоростями 4 и 6. Будем называть пару (t, d) достижимой, если существуют такие направления движения точек, что в момент t они окажутся на расстоянии d. Нарисовать множество всех достижимых пар (на плоскости с координатами (t, d)).

2. Докажите, что уравнение $P(x) = 2^x$, где P — многочлен степени n, имеет не более $n + 1$ решений.

3. Имеется угол в 120 градусов, внутри которого находятся концы отрезка длиной 2. Рассмотрим множество всех точек M внутри угла, которые не могут быть серединой такого отрезка. Найти площадь этого множества.

4. Пусть имеется несколько неотрицательных чисел, каждое из которых не меньше 1 и не больше C. Сумма этих чисел равна S. Докажите, что для некоторых k, l можно так выбрать из имеющихся чисел k штук, каждое не меньше l, чтобы $kl \geq S/(1 + \ln C)$.

5. На кирпиче $3 \times 4 \times 5$ в центре грани 3×4 имеется чернильное пятно (точечное). Кирпич начали катать по плоскости, при этом пятно пачкает плоскость, а плоскость — кирпич, и так далее. Каково максимальное количество испачканных точек на поверхности кирпича?