Независимый московский университет
Вступительный экзамен 7 сентября 2003

Время на работу — 4 часа

Для зачисления в НМУ не обязательно решить все задачи

1. Выпуклый пятиугольник P гомотетичен пятиугольнику, построенному на серединах его сторон. Верно ли, что P — правильный?

2. а) Докажите, что двумя кругами радиуса $1/2$ нельзя полностью покрыть квадрат со стороной 1.

б) Можно ли двумя кругами радиуса $1/2$ покрыть 95% площади квадрата со стороной 1?

3. Точка A расположена на границе верхнего основания прямого кругового цилиндра высоты h и радиуса 1. Точка B лежит на границе нижнего основания и повернута относительно A на 90° (то есть, равен 90° угол между плоскостями, проходящими через ось цилиндра и точки A, B соответственно).

При каких значениях h кратчайший путь по поверхности цилиндра из A в B не проходит через основания цилиндров?

[*Задача 3 некорректна! Приносим свои извинения.*]

4. Доказать, что

$$\cos(5\pi/33)\cos(7\pi/33)\cos(10\pi/33)\cos(13\pi/33)\cos(14\pi/33) = 1/32.$$

5. В клетках доски размером 100×100 расставлены 2000 крестиков. Докажите, что есть прямоугольник (со сторонами, параллельными краям доски), во всех четырех вершинах которого стоят крестики.