Независимый московский университет
Вступительный экзамен 29 июня 2003 г.
Время на работу — 4 часа
Для поступления в НМУ
не обязательно решить все задачи

1. Известно, что a^3+b^3 делится на 391 (a, b — целые числа). Докажите, что $a+b$ делится на 391.

2. Объем параллелепипеда (не обязательно прямоугольного) равен V. Для каждой его вершины X рассмотрим не содержащее точки X полупространство H_X, граница которого проходит через три вершины, соседние с X. Найти объем тела, представляющего собой пересечение всех полупространств H_X.

3. Сумма трех комплексных чисел равна 0, сумма их квадратов также равна 0, сумма кубов также равна 0. Верно ли, что сумма четвертых степеней этих чисел также равна 0?

4. Для каждого положительного числа x обозначим через $f(x)$ количество десятичных знаков в целой части x. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}(f(\sqrt{n})/f(n))$.

5. Из угла прямоугольного бильярда размером 1789×2003 выпускают под углом $45°$ к борту бильярдный шар; он движется по закону «угол падения равен углу отражения», пока не попадет в угол. На сколько частей траектория шара разобьет бильярд?

6. Требуется раскрасить точки с целыми координатами в n цветов, чтобы точки каждого цвета образовывали квадратную сетку большего размера (одного и того же для всех цветов). Возможно ли это (а) при $n = 5$; (б) при $n = 7$; (в) при $n = 185$?