26 сентября 1991 года

(первый тур осеннего экзамена)

Каждая задача оценивается в 10 баллов

1. В треугольнике ABC угол BAC равен шестидесяти градусам. BD и CE — биссектрисы углов ABC и ACB соответственно, O — точка пересечения BD и CE. Докажите, что отрезки OD и OE равны.

2. Докажите, что если $\cos a = b$ и $\cos b = a$, то $a = b$.

3. Правильный треугольник со стороной a покрыт пятью правильными треугольниками со стороной b. Докажите, что правильный треугольник со стороной a можно покрыть четырьмя правильными треугольниками со стороной b.

4. Каждое из положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ меньше суммы остальных. Докажите, что существует выпуклый многоугольник, стороны которого равны $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

5. Пусть

$$S = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n$$

(все x_i положительны). Докажите, что

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) \leq 1 + \frac{S}{1!} + \frac{S^2}{2!} + \ldots + \frac{S^n}{n!}.$$

6. Фигура S представляет собой область плоскости, лежащую выше параболы $y = x^2$ в декартовой системе координат. Можно ли конечным числом фигур, равных S (и как угодно ориентированнных), покрыть плоскость?

3 октября 1991 года

(второй тур осеннего экзамена)

Каждая задача оценивается в 15 баллов

7. Докажите, что всякую ломаную длины L можно покрыть прямоугольником площади $L^2/2$ (стороны включаются в прямоугольник).

8. В пространстве расположено N треугольников таким образом, что каждые два имеют одну общую вершину и не имеют других общих точек, причем в каждой вершине сходится одинаковое число треугольников. Какие значения может принимать число N?

(Под треугольником в этой задаче понимается треугольник «без внутренности», то есть объединение трех отрезков, соединяющих три точки, не лежащие на одной прямой).

9. Решить уравнение

$$\sin 7x + \sin 8x = 1{,}99999.$$

10. Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{(x-1)^2 + 9} + \sqrt{(x-8)^2 + 16}$$

(число x — действительное).