25 июня 1991 года

(первый тур летнего экзамена)

Каждая задача оценивается в 10 баллов

1. Докажите, что для того, чтобы треугольник ABC был остроугольным, необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие точки A' внутри стороны BC, B' внутри стороны AC и C' внутри стороны AB, для которых отрезки AA', BB' и CC' равны.

2. Найти отношение радиуса шара, вписанного в правильный тетраэдр, к радиусу шара, описанного вокруг этого тетраэдра.

3. Существует ли такая бесконечная последовательность из цифр 0 и 1, что любая подпоследовательность, образованная элементами с номерами, составляющими арифметическую прогрессию, непериодична?

4. Для любых вещественных x и y выполняется неравенство

$$f(x) - f(y) \leq (x-y)^2.$$

Найдите все такие функции f.

5. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ — некоторая перестановка чисел $1, 2, 3, \ldots, 100$. Докажите, что сумма

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + 100a_{100}$$

достигает наименьшего возможного значения для перестановки $100, 99, \ldots, 2, 1$.

6. Дан отрезок AB, полукруг, построенный на нём как на диаметре, и две прямые, проходящие через точки A и B и касающиеся полукруга. Требуется найти прямую, параллельную AB, для которой сумма площадей трёх криволинейных фигур — двух треугольников и одного сегмента — минимальна.

27 июня 1991 года

(второй тур летнего экзамена)

Каждая задача оценивается в 15 баллов

7. Доказать, что многочлен

$$x^{2n} - 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} - \ldots - 2nx + (2n+1)$$

не имеет действительных корней.

8. Пусть L_1 и L_2 — периметры правильных n-угольников: описанного вокруг окружности длины L и вписанного в эту окружность, S_1 и S_2 — площади этих многоугольников, S — площадь круга. Докажите, что:

$$L_1L_2 > L^2;$$
$$S_1S_2 < S^2.$$

9. Докажите, что число $2^{2^n} + 2^{2^n-1} + 1$ разлагается в произведение не менее чем n простых множителей (не обязательно различных).

10. Назовем коэффициентом неравнобедренности треугольника ближайшее к единице из отношений его сторон. Какие значения может принимать коэффициент неравнобедренности?