1 октября 1992 года

(первый тур осеннего экзамена)

Каждая задача оценивается в 10 баллов

1. Найти все арифметические прогрессии, для которых отношение суммы первых n членов к сумме первых kn членов не зависит от n ($k > 1$ — некоторая константа).

2. Число a — корень уравнения $x^7 - 2x + 1 = 0$, число b — корень уравнения $2x^7 - x + 1 = 0$. Что больше: a или b?

3. Через $P(n)$ обозначим число способов представления натурального числа n в виде суммы натуральных слагаемых (порядок слагаемых не учитывается; например, $P(4) = 5$, так как $4 = 4$, $4 = 3+1$, $4 = 2+2$, $4 = 2+1+1$, $4 = 1+1+1+1$). Докажите, что при $n > 1$ выполнено неравенство

$$P(n+1) + P(n-1) \geq 2P(n).$$

4. Дан трёхгранный угол $OABC$. Точка M взята на биссектрисе угла AOB, точка N — на биссектрисе угла BOC, точка P — пересечение прямой MN с плоскостью AOC. Докажите, что точка P равноудалена от прямых OA и OC.

5. Докажите, что для любой линейной функции $f(x)$ найдется точка на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$, для которой $|\sin x - f(x)| \geq 1/8$.

6. Дан многочлен $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$. Определите, при каких условиях на коэффициенты a, b, c, d существует прямая, касающаяся его графика в двух различных точках.

[Задачи второго тура не найдены в архиве — если у кого-то они сохранились, сообщите!]