## 23 июня 1992 года

(первый тур летнего экзамена)

Каждая задача оценивается в 10 баллов

1. Пространственный неплоский шестиугольник имеет три пары параллельных противоположных сторон. Докажите, что в каждой из этих пар стороны равны.

2. Существует ли бесконечная возрастающая последовательность $\{a_n\}$ неотрицательных целых чисел, для которой при любых $i$ и $j$ выполняется равенство $a_{ij} = a_i + a_j$?

3. Известны расстояния $a$, $b$ и $c$ от точки $M$ пространства до вершин $A$, $B$ и $C$ прямоугольника $ABCD$. Чему может быть равно расстояние от $M$ до вершины $B$?

4. Найдите наибольшее значение выражения

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n,$$

если $x_1, \ldots, x_n$ — неотрицательные действительные числа, причем $x_1+\ldots+x_n = 1$.

5. Провести через точку $P$ внутри данного угла отрезок $MN$ с концами на сторонах угла так, чтобы произведение отрезков $MP$ и $PN$ было наименьшим.

6. Все вершины равнобочной трапеции лежат на параболе. Докажите, что основания трапеции перпендикулярны оси параболы.

## 26 июня 1992 года

(второй тур летнего экзамена)

Каждая задача оценивается в 20 баллов

7. Докажите, что

$$\int_{-4}^{4} \sqrt{x^2+9}\,dx \int_{3}^{5} \sqrt{x^2-9}\,dx < 200.$$

8. Существует ли рациональная функция $R(x)$, не являющаяся константой и такая, что для любого $x$, для которого она имеет смысл, выполняются два равенства:

$$R(x) = R(1/x);$$
$$R(x) = R(1-x)$$

($R(x)$ называется рациональной функцией, если её можно представить как отношение двух многочленов от $x$; подразумевается, что многочлен, стоящий в знаменателе, не является тождественным нулем).

9. Рассмотрим четыре угла между плоскостями граней правильного тетраэдра и некоторой фиксированной плоскостью.

(а) Докажите, что косинусам этих углов можно приписать знаки так, что их сумма будет равна нулю.

(б) Докажите, что сумма квадратов косинусов этих углов равна 4/3.