24 сентября 1993 года

(первый тур осеннего экзамена)

Каждая задача оценивается в 10 баллов

1. Найти все параллелограммы, подобные своим серединным параллелограммам.

2. Может ли график квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ касаться графика гиперболы $y = 1/x$ в двух различных точках?

3. Медианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани. Доказать, что сумма квадратов длин медиан тетраэдра равна 4/9 суммы квадратов длин его ребер.

4. На клетчатой бумаге (длина стороны клетки равна 1) нарисована окружность радиусом $11\sqrt{3}$ с центром в вершине клетки. Сколько клеток она пересекает?

5. Доказать, что любая натуральная степень числа $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ имеет вид $\sqrt{N} - \sqrt{N-1}$ для некоторого натурального числа N.

6. Можно ли расставить числа в таблицу $n \times n$ так, чтобы суммы чисел по строкам возрастали сверху вниз, а разности суммы чисел в i-й строке и в i-м столбце убывали бы с ростом i (сверху вниз)?

26 сентября 1993 года

(второй тур осеннего экзамена)

Каждая задача оценивается в 15 баллов

7. Многочлен от двух переменных $f(x, y)$ удовлетворяет для любого a и любого целого k соотношению $f(a, k - a) = k$. Найти значение $f(1/2, 1/2)$.

8. В пространстве задана точка, все координаты которой рациональны. Существует ли такая сфера, проходящая через эту точку, на которой нет иных точек с рациональными координатами?

9. Точка с координатами $\langle x, y, z\rangle$ удовлетворяет системе

$$x - z + \frac{2yz}{y^2 + z^2} = 0,$$
$$y - z - \cos xz = 0.$$

Доказать, что она отстоит от прямой $x = y = z$ не более чем на $\sqrt{2}$.

10. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Доказать, что сумма радиусов вписанных в треугольники ABC и ACD окружностей равна сумме радиусов вписанных в треугольники BCD и ABD окружностей.