26 июня 1993 года

(первый тур летнего экзамена)

Каждая задача оценивается в 10 баллов

1. Прямые $L_1, \ldots, L_n$ на плоскости проходят через одну точку. Докажите, что геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до этих прямых постоянна, есть контур выпуклого многоугольника.

2. Укажите какое-либо разложение многочлена $x^{10}+x^5+1$ на множители ненулевой степени с целыми коэффициентами.

3. Функция $F(x)$ определена при всех действительных x, причем для любого x выполняются условия: (а) $F(x+3) \leqslant F(x)+3$; (б) $F(x+2) \geqslant F(x)+2$. Докажите, что функцию $F(x)$ можно представить в виде $F(x)=x+G(x)$, где $G(x)$ — некоторая периодическая функция.

4. Из вершины с координатами $\langle 0,0,0\rangle$ единичного куба $0 \leqslant x,y,z \leqslant 1$ вылетает шарик со скоростью $v=\langle 6,15,0\rangle$. Шарик отражается от стенок куба по закону «угол падения равен углу отражения» до тех пор, пока не ударится в ребро. В какое ребро ударится шарик и сколько отражений произойдет до этого удара?

5. Докажите, что

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx > \int_0^1 3^{-(x-1)^2}\,dx$$

6. Вершины единичного куба раскрашены в белый и черный цвета так, что концы каждого ребра покрашены в разные цвета. Рассмотрим два тетраэдра — с белыми и черными вершинами соответственно. Найдите объёмы (а) пересечения; (б) объединения этих тетраэдров.

28 июня 1993 года

(второй тур летнего экзамена)

Каждая задача оценивается в 15 баллов

7. Множество M в пространстве таково, что его ортогональная проекция на некоторую плоскость есть треугольник со сторонами $3,4,5$, а ортогональная проекция на некоторую другую плоскость есть круг диаметра d. При каких d это возможно?

8. Сколько точек самопересечения у кривой, которую описывает точка $M(x,y)$, если $x=\cos 15t$, $y=\cos 17t$, $t\in[0,\pi]$?

9. Показателем невписанности четырехугольника назовем наименьшее из таких чисел d, что перемещением вершин четырехугольника на расстояния, не превышающие d, их можно поместить на одной окружности (прямую считаем окружностью бесконечного радиуса). Найти максимальное значение показателя невписанности для ромбов со стороной 1.

10. О многочлене $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ известно, что $P(1)=1$, $P(0,9)=0$, $-0{,}1\leqslant P(x)\leqslant 0$ при $0\leqslant x\leqslant 0{,}9$. Докажите, что (а) $n>2$; (б) $n>3$.