18 сентября 1994 года
(первый тур осеннего экзамена)

Каждая задача оценивается в 10 баллов

1. Последовательность a_n задана соотношением: $a_{n+1} = 1/(1-a_n)$. Найти a_{17}, если $a_1 = 3+\sqrt{7}$.

2. Известно, что

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+100)} = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x+2} + \ldots + \frac{a_{100}}{x+100}$$

Найти a_1.

3. Дан треугольник ABC. (а) Обозначим через M_h множество всех точек, которые отстоят от какой-либо точки на границе или внутри треугольника не более чем на h. (При $h=0$ получается сам треугольник вместе с внутренностью.) Доказать, что площадь множества M_h при положительных h имеет вид ah^2+bh+c. Чему равны коэффициенты a, b, c, если стороны треугольника равны 3, 4 и 5?

(б) Тот же вопрос, если M_h — множество точек, отстоящих не более чем на h от границы треугольника. Однако в этом случае площадь M_h является одним квадратным трёхчленом от h для h, не превосходящих некоторого h_0, и другим для больших h. Указать оба этих трёхчлена и h_0 для треугольника со сторонами 3, 4 и 5.

4. Из прямоугольного параллелепипеда с длинами сторон 3, 4, 5 вырезали тело, получающееся объединением всех шаров радиуса 1, целиком помещающихся в этот параллелепипед. Найти объем оставшейся части.

5. Найти радиус наибольшего круга, содержащего точку $\langle 0,0\rangle$ и целиком содержащегося во множестве $\{\langle x,y\rangle \mid y \geq x^2\}$.

6. Может ли тетраэдр иметь целые координаты вершин, не содержать внутри себя и на своей границе других точек, все координаты которых целые, и иметь объём больше 1000?

25 сентября 1994 года
(второй тур осеннего экзамена)

Каждая задача оценивается в 15 баллов

7. Указать все точки куба (внутри и на границе), через которые можно провести шестиугольное сечение.

8. На множестве целых чисел задана функция, принимающая целочисленные значения. Доказать, что ее можно представить в виде суммы трех взаимно-однозначных функций (принимающих каждое значение ровно один раз). (Любая функция $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ представима в виде суммы трех биекций $f_1, f_2, f_3\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$).

9. Круглый тор — это поверхность, получаемая вращением окружности относительно прямой, лежащей с этой окружностью в одной плоскости. (а) Написать уравнение тора в прямоугольных координатах. (б) Найти максимальное число точек пересечения прямой и круглого тора.

10. Известно, что уравнение $b + ax = \sin x$ имеет при некоторых a и b ровно n решений. Сколько решений может иметь (при тех же a и b) уравнение $b - ax = \sin x$? (Найти все возможные значения разницы между числом решений второго и первого уравнений.)