27 июня 1994 года

(первый тур летнего экзамена)

Каждая задача оценивается в 10 баллов

1. Может ли уравнение $a_1^x + \ldots + a_n^x = 1$ иметь два корня при некоторых значениях параметров $a_1, \ldots, a_n$? $(n \geq 2)$

2. На плоскости нарисовано несколько окружностей, проходящих через точку O и имеющих в этой точке общую касательную. Существует ли дуга окружности, которая пересекает все эти окружности в различных точках под углом в $30°$?

3. При каких c система уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + c, \\ x = y^2 + c \end{cases}$$

имеет решение? Как зависит число решений от c? Точка (x, y) включается в множество M, если при некотором c она является решением системы. Нарисовать на плоскости множество M.

4. Куб имеет сторону 10. Выбраны 4 вершины куба, никакие две из которых не являются соседними (концами одного ребра). Доказать, что не существует плоскости, от которой все эти вершины отстояли бы не более чем на 0,1.

5. На плоскости нарисовали тушью треугольник со сторонами 30, 40, 50. Затем по плоскости прокатили цилиндр радиуса 1 из промокашки, на котором треугольник отпечатался в виде самопересекающейся кривой, причем образующая цилиндра не была перпендикулярна сторонам треугольника. Найти число точек самопересечения у линии-отпечатка на цилиндре. (Указать все возможности.)

6. Ортогональная проекция куба на плоскость — шестиугольник, вершины которого являются проекциями вершин куба и имеют координаты $(-50, -20)$, $(-14, -45)$, $(38, -45)$, $(53, 15)$, $(17, 40)$, $(-35, 40)$. Найти длину ребра куба.

29 июня 1994 года

(второй тур летнего экзамена)

Каждая задача оценивается в 15 баллов

7. Сумму дробей привели к общему знаменателю:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \ldots + \frac{1}{x+100} = \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{(x+1)(x+2)\cdots(x+100)}$$

(а) Найти n. (б) Найти a_n. (в) Сравнить a_0 по величине с 1, 10, 10^{10}, 10^{100}, 10^{1000}. (г) Доказать, что все a_i чётны.

8. Найти на сфере единичного радиуса с центром в точке $(0, 0, 0)$ точку, сумма квадратов расстояний от которой до точек $(1, 3, 7)$, $(2, 5, 6)$, $(-1, 2, 7)$, $(1, -3, 4)$, $(-1, 3, -7)$ и $(1, 0, 1)$ была бы минимальна.

9. На стороне OA угла AOB отложены точки A_1, A_2, A_3, A_4 через равные расстояния $(A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4)$; на стороне OB, также через равные

расстояния, отложены точки B_1, B_2, B_3, B_4. Найти площадь четырёхугольника $A_2B_2B_3A_3$, если известны площади четырёхугольников $A_1B_1B_2A_2 = S_1$ и $A_3B_3B_4A_4 = S_2$.

10. Последовательности a_n и b_n заданы рекуррентно: $a_0 = b_0 = 2$; $a_{n+1} = a_n^2 + 5$; $b_{n+1} = b_n^2 + 2^n$. Сравнить a_{1000} и b_{1000}.