3 сентября 1995 года

(осенний экзамен)

Каждая задача оценивается в 10 баллов

1. Цилиндрическую кружку радиуса 1 и высоты 2, наполненную до верха водой, наклонили на угол $30°$. Найти объём оставшейся воды.

2. На плоскости лежит вырезанный из бумаги квадрат $ABCD$ (вершины перечислены по часовой стрелке). За один шаг можно повернуть квадрат вокруг любой из его вершин на $90°$. Через несколько шагов квадрат возвращается на первоначальное место (возможно, повёрнутым). В каком месте может оказаться вершина A? Перечислить все варианты и доказать, что других нет.

3. В таблице из 11 строк и 10 столбцов записаны целые числа. Доказать, что можно выбрать некоторое количество строк так, чтобы в каждом столбце сумма чисел из выбранных строк была бы чётной.

4. Доказать, что многочлен $xy - 1$ не разлагается в произведение двух множителей вида $ax + by + c$.

5. Найти площадь проекции прямоугольного параллелепипеда $3 \times 4 \times 5$ на плоскость, перпендикулярную его главной диагонали.

6. Найти наименьшее значение ординаты середины отрезка длины a, концы которого расположены на параболе $y = x^2$ (рассмотреть все возможные значения a).