16 апреля 1995 года

(первый тур весеннего экзамена)

Каждая задача оценивается в 10 баллов

1. При каких n система

$$\begin{cases} \cos x_1 + \dfrac{1}{2}\cos x_2 + \ldots + \dfrac{1}{2^{n-1}}\cos x_n = 0, \\ \sin x_1 + \dfrac{1}{2}\sin x_2 + \ldots + \dfrac{1}{2^{n-1}}\sin x_n = 0 \end{cases}$$

имеет решение?

2. Какое максимальное количество квадратных сечений может иметь тетраэдр?

3. Докажите, что значение многочлена $x^{15}+2x^{14}+4x^{13}+\ldots+2^{15}$ можно вычислить, сделав не более 7 арифметических действий (результаты промежуточных вычислений запоминаются).

4. Найти наименьшую длину гипотенузы прямоугольного треугольника, описанного вокруг окружности радиуса 1.

5. Решить уравнение $x+1 = 1995(1995x^2-1)^2$.

6. Доказать, что для любого k найдутся последовательные натуральные числа m и $m+1$ такие, что

$$(3-\sqrt{8})^k = \sqrt{m+1}-\sqrt{m}.$$

23 апреля 1995 года

(второй тур весеннего экзамена)

Каждая задача оценивается в 15 баллов

7. (а) Доказать, что суммами различных чисел вида $1/k$ (k — натуральное) можно сколь угодно точно приблизить числа на отрезке $[0,1]$. (б) Как можно более точно оценить минимальное число слагаемых, необходимое для приближения чисел на отрезке $[0,1]$ суммами указанного вида с точностью 10^{-6}.

8. Можно ли в правильном октаэдре с длиной ребра 1 м разместить восемь непересекающихся шаров диаметра 40 см?

9. Сколько решений имеет уравнение $\log_a x = a^x$ в зависимости от значений параметра a?

10. Числа $a<b<c$ — корни многочлена x^3-3x+1. Найти $a/b+b/c+c/a$.

20 мая 1995 года

(вступительное собеседование)

1. $ABCD$ — грань куба, точки E, F, G, H — середины ребер противоположной к $ABCD$ грани. Определить число граней у пересечения четырех четырехугольных пирамид, основанием которых является квадрат $ABCD$, а вершинами — точки E, F, G, H.

2. Доказать, что $\sin(x^2)$ — непериодическая функция.

3. Указать такое число $a>0$, что площадь фигуры, ограниченной прямыми $x=0$, $y=0$ и кривой $x^a+y^a=1$, меньше 10^{-1}.

4. Дан многочлен $P(x) = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$. Найти остаток от деления многочлена $P(x^{12})$ на $P(x)$.

5. Многочлен $(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{20})$ привели к стандартному виду $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$. Какой из коэффициентов больше: a_{100} или a_{110}?